关键词

质数、素数，素数定理，概率，概率统计，哥德巴赫猜想，黎曼猜测，熊氏积分，费马大定理，希尔伯特第八问题，卡米歇尔数，亲和数，Mersenns 素数，重一素数，斐波那契素数，素数率，等几公理，素数公理，边界，重对数值域边界，平均值定义域边界　，回文素数，K 生素数，孪生素数，概率数码论，数码公理，概率格点论，格点公理，超级素数，圆周率

Prime，

内容简介

书中定理均获得已有实际数据的支持；用本方法证已有定理时，两者结果等价
本书为概率论及素数论提供了一套解决问题的新方法。解决或部分解决素数论中若干问题，并发展了概率论。作为一个全新思维模式初创理论，笔者感到它解决某些问题相对容易简洁。是大学生、研究生毕业论文切入前沿性课题的一个机会。可作为数学爱好者、数学工作者、大学及研究生教材。

前言

阅读本书需大二数学知识

本书将概论论与素数论结合，产生了一个数论新分支——概率素数论，它吸收概率论与素数论两者的优势：计算理论值——概率量时，使用概率的方法、定义、定理等；表达实际值——频率量时，力求使用素数论的方法，建立相关的方程、表达式等，并转换成对应的概率量进行计算。还将概率素数论的方法，应用在数码、格点问题中，形成概率数码论、概率

格点论，但它们基本上是概率素数论这一方法的应用，故本书仍定名为概率素数论

概率素数论与概率论的比较

1、相同点：都是研究分析不存在简单规律的指定事件，在统计意义上出现的规律性

2、不同点：前者研究随机事件；后者研究确定事件

3、注意事项：用概率论研究素数问题时，必须验证理论结果与实际数据是否相符，原因在于素数问题有自身的规律，不能保证任何素数问题出现的规律，都一定等价于随机事件

概率素数论中的频率量与素数论中的密率[1] P584 比较

1、相同点：两者虽然名称不同，但表达的数学思想实质上是相同的，即都能借助于素数论的方法研究素数问题

2、不同点：建立相关公理后，前者可借助于概率论的方法研究素数问题，后者却不能

3、意义：理论上讲，用后者方法获得的结果，都可以用前者方法获得，反之，不一定能行

概率素数论与素数论的比较

素数论经过长期发展，其中定理比较成熟，对某些不确定量阶的估值，做得较好；概率素数论在这方面做的工作少，边界只是界定了不确定量的最大值，仍有不少问题亟待解决：如是否还可以研究边界的分布——边界的边界问题、众多素数量的分布问题、它们的内在规律、外部面貌及实际应用，既为概率素数论的发展提供了丰富的素材，又为这些问题的解决增加了一个可能的途径

作者参加过内江市 1988 年的数学年会，并在年会上介绍论文：本书的核心内容及 1983 年写的费马大定理的证明及推广。2006 年 12 月 14 日在四川省版权局申报版权保护（登记号：21—2007—A—（2260）—015）

1982 年秋笔者大学物理专业毕业，1983 年春，偿试研究数学问题。鉴于自己非数学专业毕业，缺少这方面的资料，依曦想起了 1978 年春轰动全国的徐迟报告文学所提到的陈景润及哥德巴赫猜想，进而不切实际地将哥德巴赫猜想当成了目标，查阅资料后，明白了它的含意：偶数可表为两素数之和

人们在素数复杂的分布中，长期努力未能找到简单确定的规律，出现了孪生素数猜想、哥德巴赫猜想、黎曼猜测等世界难题

作为一个在数学能力、数学知识、数学环境落后于人的数学爱好者，想在艰难的素数问题上有所作为，放弃主流数学使用的高深繁杂方法、放弃通往素数论前沿慢长困苦的现成道路、放弃学习不必要的众多数学知识，运用已有知识将有限的精力和时间投入到创新中，成了寻求捷径争取成功的选择。进而将缺少素数论知识的劣势，变成不受传统数学思想约束、轻装上阵的优势，凭借仅有知识寻求突破。在思索约三个月后产生了第一个想法，将命题“偶数可表为两素数和”变为“计算偶数表为两素数和的表法个数”，如果证明它大于1，哥猜就成立了。顺着这个思路获得平均值的表达式，借助素数定理得到平均值的近似公式，经手工小范围计算获得的实际数据，支持这一理论结果。将此法用在其它素数问题中所获得的结果，均得到找到的实际数据或已有定理的支持。分析后发现，只有概率论能对这些结果给出合理解释。这一思想的产生，得益于笔者在西南交通大学学习过程中，受到良好的思维训练和老师经常反复传授：要大胆向现在知识、现在书本挑战，从最熟视无睹的现象中

寻找真理；也许还得益于笔者具有物理思维背景——从实际数据中寻找规律、从规律中寻找原因。也许还得益于，非数学思维背景——不受已有数学思想约束，…….。一个是解决随机问题的工具——概率论，一个是具有确切分布规律的问题——素数分布，如何调合这一对立并有悖传统数学思想的矛盾而将它们结合，最初的做法是简单并违背常理地把素数定义成“随机事件”，从而将两者结合。为使这一新方法能在数学上站稳脚跟，并说服数学界认可她、使用她、发展她并服务数学，多年后产生一个折衷方案：将素数出现的不规律性，看成与随机事件，在统计意义上等价。并设定了素数公理，为素数论中全面引进概率论铺平道路。随着微机的普及和性能的提高，笔者自己、或请热心网友编程、或请网友帮我在网上寻找，获得了更大范围的更多、更精确的数据，使实际数据证实的精度不断提高、个数不断增加，使笔者对本理论的公理基础——素数是"随机事件"的信心不断增加，成了我在前途不明的艰难探索中的源动力

为强化概率论的功能——使它既能描述可能性，又能描述肯定性，为解决哥德巴赫猜想、黎曼(Riemann)假设等问题扫清障碍，通过边界公理的设置，建立了边界。将频率、概率、方差、概率分布密度函数等，概率论的方法引入素数论中，初步建立素数论分支——概率素数论，简称概素论。解决了若干涉及素数的问题。书中给出了最大误差——边界的计算方法，并计算出了几个函数的边界，可将它应用在任何概率函数的边界问题计算中。

除完备素数问题外，书中大部分结果，均有一个未能从理论上确定、极限是常数的系数——同阶函数。虽可由实际 数据估值，却使问题的完美解决， 尚存一步之遥。这是概素论一个重要的努力方向。庆幸的是，由概素论获得的素数定理、哥德巴赫猜想分析解------哥数定理等问题，不受此困扰，在分析的基础上解决了希尔伯特第八问题。为求得精确的哥数理论解，曾较长时间研究对数函数倒数的近似积分，无意间获得了 1/lnt 一至三次幂函数较精确的近似积分，在这个结果基础上，又经过多年努力，终于在最近获得了突破：建立了一个笔者命名为“熊氏积分”——针对 1/lnt 类函数的一个积分方法，这是一个含待定系数并用“优选法”确定其值的分步积分方法，是中国人在经典微积分理论上的一点贡献，有待于寻找适用于此积分方法的其它函数

作为由一个数学爱好者草创的理论，它的逐渐完善需要大家共同长期努力。由于笔者能力，书中不当不足、笔误错误之处，恳请大家提出，大家共同改进。有些仍未彻底解决的问题，虽使用的方法思路不能保证最终能达到目的，当笔者认为对问题的最终解决可能有所帮助时，仍将这些不成熟的思想写入书中，希望有益解决这些问题。有些比较明显成立的性质、结论、公式，并未提供严格的证明而直接列出，争取再版能做得更完善

可认为《概率素数论》是一门实验数学，不能保证用目前的理论解决新的素数问题完全适用，它需要由实际数据检验，当理论不正确时，就需要对现有理论进行补充、修改和发展，直到正确为止

书中提出的等几公理，其数学内涵需要深入挖掘。无简单分布规律的确定事件，为什么能与等几随机事件在统计意义上等价？如何判断那些情况下两者等价？笔者目前无力解决这些问题，只能用模糊的语言叙述其公理

一个理论的出现或问题的解决，虽有一定的随机性，可能相当多的情况下，有其必然性，可能更多地表现在时间先后不同上。是否可用概率思想进行理解：大量小概率事件（许多人攻克某问题的成功率）累计到足够多时，必发生指定事件——某个或几个人获得成功（书中将此现象发生的条件定义为边界），这也是笔者提出的一个概率论问题：重对数定理给出了发生事件的上限，那发生事件的下限是多少？如勾股定理，就是在不同国家、不同时间，用相同或不同方法独立地得到解决，甚至还有几乎同时相互独立地用相同方法解决同一问题的巧合，如牛顿和莱布尼兹独立建立微积分。

作者探索过程中，得到许多帮助、支持和启发

感谢数学家华罗庚、陈景润等数学前辈的著作和成果

感谢诗人徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》，他们孕育了此书

感谢《概率素数论》在 1988 年 4 月申报国家自然科学基金时，内江师范学院数学系黄教授、杨荣先教授及我当时所在单位铁二局子弟学校张伏瑞副校长在申请书上签注推荐意见等支持（虽未能得到国家批准）

本书书写过程中用过免费排版软件 LaTaX 软件，感谢它中文网站 CTEX 中，aloft 们的鼎力相助

感谢网站“东陆论坛”，为本书的一些结果，提供了一个公诸于众的交流平台，并得到该论坛上，crank、junerr、wtquan、火大不、申一言、天山草、刘守身等众网友的帮助、关心、支持。网友们的一些灵感、想法、问题、帮我编程计算若干宝贵数据及网上为我查找的资料数据，丰富充实了本书

感谢沈仁义，付佑举，刘亚丁，邓新民、妻子钟克励等亲朋好友老师同学及家人的支持帮助

2004 年在熊一鸣的帮助下用 CTEX 免费软件排版并在内江版权局用内部书号出版了本书摘要，在资中县科技局局长曹兵帮助下，本书概要发表在 2004 年第六期《内江科技》上，

感谢母校西南交通大学和授课老师，使笔者在求学过程中，学习、分析、解决问题能力得到了显著提高，为本书的写作打下了基础

感谢母校郭可詹教授、刘学峰教授、扬国忠教授、同学王祖源、陈景星等的支持帮助

在母校理学院王黎院长、出版社等学校领导及编辑的大力支持下,本书才得以出版，借此致谢!

熊一兵

2002 年 10 月初稿于四川省资中县

2008 年 4 月修改

参考文献

[1]{hlg}华罗庚，数论导引，科技出版社，1979 年

[2]{wy}王元,谈谈素数，上海教育出版社，1978 年

[3]{pcd}潘承洞、潘承彪，素数定理的初等证明，上海科技出版社，1988 年

[4]{fd}复旦大学，概率论，高等教育出版社，1979 年

[5]{wzk}王梓坤，概率论基础及其应用，科技出版社，1979 年

[6]{sx}原北京矿业学院高等数学教研组，数学手册，燃料化学工业出版社，1973 年

[7]{sxxcd}王文才、施桂芬，数学小辞典，科学技术文献出版社，1983 年

[8]{sk}孙琦、旷京华，素数判定与大数分解，辽宁教育出版社，1987 年

[9]{ks}柯召、孙琦，数论讲义，高等教育出版社，1986 年

[10]{lzh}闵嗣鹤，严士健，初等数论(第二版)，高等教育出版社，1984 年

[11] {HGHL} Hardy G H. Littlewood J E. Some problems of ‘partitio numerorum’ Ⅲ: on the expression of a number as a sum of primes［J］.Acta Math. 1922.44：1-70.

[12] {xyb} 熊一兵 ，《概率素数论》摘要，内江科技，2004 年，（6）：77～78[In Chinese]

[13] 宋富高、双重概率筛法与素数分布(修订版)--关于 Goldbach 猜想、Hilbert 第八

问题与余新河猜想的研究 The Dual Probability Sieve Method and the Distribution of Primes(Revision)- On the Goldbach conjecture,the 8th problem of Hilbert and the YU Xin-he conjecture <<深圳大学学报（理工版） >>2003 年 04 期

四川省版权局版权登记号：
21—2007—A—（2260）—015

作品名称：概率素数论

作品类型：文字作品

作者：熊一兵

著作权人：熊一兵

作品完成日期：2002 年 10 月 30 日

四川版权局局长：周国良

2007 年 02 月 01 日

新旧编号对照：
5 章
2 节：新编号---旧编号（24）25
3 节：新编号---旧编号 74
4 节：新编号---旧编号 102
5 节：新编号---旧编号
引用一段来自网上（网址：http://baike.baidu.com/view/90415.htm）的短文

哥德巴赫猜想意义

“用当代语言来叙述，哥德巴赫猜想有两个内容，第一部分叫做奇数的猜想，第二部分叫做偶数的猜想。奇数的猜想指出，任何一个大于等于 7 的奇数都是三个奇（“奇”fangfangma 所加，好像大部分网站都有“奇”）素数的和。偶数的猜想是说，大于等于 4 的偶数一定是两个奇（“奇”fangfangma 所加，好像大部分网站都有“奇”）素数的和。”（引自《哥德巴赫猜想与潘承洞》）

关于歌德巴赫猜想的难度我就不想再说什么了，我要说一下为什么现代数学界对歌德巴赫猜想的兴趣不大，以及为什么中国有很多所谓的民间数学家对歌德巴赫猜想研究兴趣很大。

事实上，在 1900 年，伟大的数学家希尔伯特在世界数学家大会上作了一篇报告，提出了 23 个挑战性的问题。歌德巴赫猜想是第八个问题的一个子问题，这个问题还包含了黎曼猜想和孪生素数猜想。现代数学界中普遍认为最有价值的是广义黎曼猜想，若黎曼猜想成立，很多问题就都有了答案，而歌德巴赫猜想和孪生素数猜想相对来说比较孤立，若单纯的解决了这两个问题，对其他问题的解决意义不是很大。所以数学家倾向于在解决其它的更有价值的问题的同时，发现一些新的理论或新的工具，“顺便”解决歌德巴赫猜想。

例如：一个很有意义的问题是：素数的公式。若这个问题解决，关于素数的问题应该说就不是什么问题了。

为什么民间数学家们如此醉心于哥猜，而不关心黎曼猜想之类的更有意义的问题呢？一个重要的原因就是，黎曼猜想对于没有学过数学的人来说，想读明白是什么意思都很困难。而歌德巴赫猜想对于小学生来说都能读懂。

数学界普遍认为，这两个问题的难度不相上下。

民间数学家解决歌德巴赫猜想大多是在用初等数学来解决问题，一般认为，初等数学无法解决歌德巴赫猜想。退一步讲，即使那天有一个牛人，在初等数学框架下解决了歌德巴赫猜想，有什么意义呢？这样解决，恐怕和做了一道数学课的习题的意义差不多了。

当年柏努力兄弟向数学界提出挑战，提出了最速降线的问题。牛顿用非凡的微积分技巧解出了最速降线方程，约翰·柏努力用光学的办法巧妙的也解出最速降线方程，雅克布·柏努力用比较麻烦的办法解决了这个问题。虽然雅克布的方法最复杂，但是在他的方法上发展出了解决这类问题的普遍办法——变分法。现在来看，雅克布的方法是最有意义和价值的。

同样，当年希尔伯特曾经宣称自己解决了费尔马大定理，但却不公布自己的方法。别人问他为什么，他回答说：“这是一只下金蛋的鸡，我为什么要杀掉它？”的确，在解决费尔马大定理的历程中，很多有用的数学工具得到了进一步发展，如椭圆曲线、模形式等。

所以，现代数学界在努力的研究新的工具，新的方法，期待着哥德巴赫猜想这个“下金蛋的鸡”能够催生出更多的理论。

《概率素数论》就是哥德巴赫猜想这个“下金蛋的鸡”，催生出的一个理论

第 1 章　理论基础

1.1 概念

1.1.1 概率确定论

概率论是十七世纪，研究赌博这一随机事件（现象）中建立起来的，广泛应用在各个领域的随机事件中。应用概率论近似求解某些微分方程，是它在确定事件中首次应用，不妨将此方法称为：概率方程论，这里暂不讨论概率方程论。本书将概率论，用在另外三个确定事件中：1、素数的分布；2、数码的分布；3、格点的分布。从而建立《概率素数论》、《概率数码论》及《概率格点论》。甚至可以沿着这一思路，将它应用在其它学科的确定事件中，如与模糊数学结合可能建立《概率模糊论》，图示如下

$$\text{概率论} \Rightarrow \begin{cases} \text{概率随机论} \\ \text{概率确定论} \\ \text{概率模糊论} \end{cases} \qquad \text{概率确定论} \Rightarrow \begin{cases} \text{概率素数论} \\ \text{概率数码论} \\ \text{概率格点论} \\ \text{概率方程论} \end{cases}$$

图　1.1

本书利用概率论，研究目前在理论上，不能准确计算的素数论问题，概率素数论与概率论，虽研究的对象不同，但处理问题的方法思路相似，在公理的支持下，可将概率论中的量引入素数论，为方便理解，定义了若干相似的名称。在理论值的计算中，一般只进行连续函数的积分计算，对应离散函数的求和， 用积分近似代替。书中前面证明过的定理、引理等常直接使用。书中求和、积分上限或结果中变量的值是有限值时，一般要求它不小于足够大的常量，否则可能增加所得结果的误差，后面一般不再叙述这个条件

为叙述方便，重叙某些定义等已有知识

定义 1 若随机事件ξ的分布函数为$F(x)$，ξ的平均值为$E\xi$，ξ^2的平均值为$E\xi^2$，则

$$\left.\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \\ E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

引理 1 均方差为$\sigma(x)$，则

$$\sigma^2(x) = E\xi^2 - (E\xi)^2 \tag{2}$$

证明

$$\sigma^2(x)=E(\xi-E\xi)^2=E\left[\xi^2-2\xi E\xi+(E\xi)^2\right]$$

整理上式得本定理，证毕

1.1.2 理论值与实际值

一般用小写字母开头的字符串代表实际值，如用 π(x)表示小于 x 的自然数中，素数的实际个数，它对应概率论中的频率

一般用大写字母开头的字符串代表理论值，如用 Π(x) 表示小于 x 的自然数中，素数的理论个数，它对应概率论中的最可几值

约定 理论值用连续可积可微函数表达

1.1.3　随机事件和确定事件的定义

事件可分为随机事件和确定事件两类，定义如下

定义 2 对某一系列事件，在相同条件下重复任意次，每次所得结果完全相同，称它为确定事件，否则称为 随机事件

素数分布、无理数的数码分布、格点分布等，都是确定事件；

射击等任意文体比赛成绩、扑克游戏等都是随机事件

1.1.4 Q 数及 Q 数定理

定义 3 将变量 t 或函数 $h(t)$ 满足涉及某素数条件 Q 数的实际值及理论值，称为变量 t 或函数 $h(t)$ 的 $q(t)$ 、$q(h(t))$ 、$Q(t)$ 、$Q(h(t))$ 数，它们在 $t\le x$ 条件下的求和值记为 $\pi(q(x))$ 、$\pi(q(h(x)))$ 、$\Pi(Q(x))$ 、$\Pi(Q(h(x)))$，这两组表达式，分别简称 Q 数及 Q 数定理，则

$$\pi(q(x))=\sum_{t\le x}q(t) \tag{3}$$

$$\Pi(q(x))=\int^x q(t)\,dt \tag{4}$$

$$\pi(q(h(x)))=\sum_{t\le x}q(h(t)) \tag{5}$$

$$\Pi(Q(h(x)))=\int^x Q(h(t))\,dt \tag{6}$$

它将素数定理作了一般性推广，并可得到 Mersenne(2^p-1) 素数定理 $\pi_M(x)$ 、$\prod_M(x)$，费马 $(2^{2^n}+1)$ 素数定理 $\pi_F(x)$ 、$\prod_F(x)$，哥数定理 $\pi_G(x)$ 、$\prod_G(x)$ 等

1.1.5 Q 数及 Q 数定理的性质

一般 t 的 Q 或 $Q(h(t))$ 数的值，不易精确描述，当 Q 数定理 $\pi_Q(x)$ 、$\prod_Q(x)$ 或 $\pi_Q(h(x))$ 、$\prod_Q(h(x))$ ，在 x 的值足够大时，则可对 Q 数定理 $\pi_Q(x)$ 、$\pi_Q(h(x))$ 等的值进行精确描述。因为统计的样本值越多，其均值的相对波动越小，相对精度越高

如 t 是否是素数不能确定，但素数定理本书中已作了精确描述，从理论上可以确定理论值与实际值的相对误差，与统计范围平方根的倒数相当，实际数据支持这个结论

虽理论上不能确定实际值，但列出实际值后，常能帮助我们分析，与它对应的理论值各个量之间的关系，故书中常并列地写出实际值与理论值的函数表达式。与概率论一样，概素论的任务，也是分析素数事件的各种理论值，并由此描述实际值的分布情况，这就是本书的任务

1.2 定义数学表达符

1.2.1 极值选择表达符

为简捷方便表达数学含意，更新或定义新的数学表达符

定义 4 最大值选择表达符 $Max\{H_{r,J}\}_{r=a}^{r=b}$ ，表示 r 在定义域(a,b)内取值时，选择 $H_{r,J}$ 中的最大值

定义 5 最小值选择表达符 $Min\{H_{r,J}\}_{J=a}^{J=b}$ ，表示 J 在定义域(a,b)内取值时，选择 $H_{r,J}$ 中的最小值

1.2.2 重复表达符

定义 6 将多次相同或相似的运算表达形式，用符号简单表示如下

$$\prod_{J=1}^{\bar{m}} H(J)[R] = \begin{cases} \prod_{J=1}^{\bar{m}} H(J)R = \overbrace{H(1)H(2)\cdots\cdots H(m)}^{m\text{个}H(J)}R \\ \prod_{J=1}^{\bar{m}} H(J) = \overbrace{H(1)H(2)\cdots\cdots H(m)}^{m\text{个}H(J)} \end{cases}$$

$$\prod_{J=1}^{\bar{m}} H[R] = \overbrace{HH\cdots\cdots H}^{m\text{个}H}[R] = \begin{cases} \prod_{J=1}^{\bar{m}} H[R] = \overbrace{HH\cdots\cdots H}^{m\text{个}H}R \\ \prod_{J=1}^{\bar{m}} H = \overbrace{HH\cdots\cdots H}^{m\text{个}H} \end{cases} \quad (7)$$

$$\prod_{J=0}^{\bar{1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}H[t]=tHt \quad , \quad \prod_{J=0}^{\bar{2}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}H[t]=tHtHHt \quad , \quad \prod_{J=0}^{\bar{3}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}H[t]=tHtHHtHHHt$$

举例如下

$$\prod_{J=1}^{\bar{0}}\ln[t]=t\,,\ \prod_{J=1}^{\bar{1}}\ln[t]=\ln t\,,\ \prod_{J=1}^{\bar{2}}\ln[t]=\ln\ln t\,,\ \prod_{J=1}^{\bar{3}}\ln[t]=\ln\ln\ln t$$

$$\prod_{J=0}^{\bar{1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t \quad , \quad \prod_{J=0}^{\bar{2}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln t \quad , \quad \prod_{J=0}^{\bar{3}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln t\ln\ln\ln t$$

$$\left(\prod_{L=1}^{\bar{1}}\ln\left[{}^{1+\varepsilon}t\right]\right)\prod_{J=0}^{\overline{L-1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln{}^{1+\varepsilon}t \quad , \quad \left(\prod_{L=1}^{\bar{2}}\ln\left[{}^{1+\varepsilon}t\right]\right)\prod_{J=0}^{\overline{L-1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln{}^{1+\varepsilon}t$$

$$\left(\prod_{L=1}^{\bar{3}}\ln\left[{}^{1+\varepsilon}t\right]\right)\prod_{J=0}^{\overline{L-1}}\prod_{K=1}^{\bar{J}}\ln[t]=t\ln t\ln\ln t\ln\ln\ln{}^{1+\varepsilon}t \quad ,\cdots\cdots$$

$$\prod_{J=1}^{\overline{S-1}}\int_{t_{J-1}}^{\frac{1}{\sqrt[k]{S+1-J}}}dt_J=\int_{t_0}^{\frac{1}{\sqrt[k]{S}}}dt_1\int_{t_1}^{\frac{1}{\sqrt[k]{S-1}}}dt_2\cdots\cdots\int_{t_{S-3}}^{\frac{1}{\sqrt[k]{3}}}dt_{S-2}\int_{t_{S-2}}^{\frac{1}{\sqrt[k]{2}}}dt_{S-1}\quad(2\le S) \qquad (8)$$

此类符号称为重复运算表达符，简称重表符

1.3 左侧符号

1.3.1 左下标——函数的名称

定义 7 函数${}_{\psi}\mathrm{u}(\mathrm{x})$中左侧下标符号“$\psi$”，是函数$\mathrm{u}(\mathrm{x})$的名称，称为函数名。它用来特指函数簇$\mathrm{u}(\mathrm{x})$中，某一指定函数。可用任意符号作函数名称

现在的上下标，一般标注在字母或字符串的右边，如a_1、$G_1(x)$，为简捷地定义、表达、传递及丰富字符串的含意，本书增加了在字母或字符串的左边，定义上下标的功能。左下标定义函数名，既方便区别同名函数，又让右下标方便定义级数或多项式等 ，常用于下面将介绍的同阶函数和渐近函数等函数中

左上标定义了两类量

（1） 边界表达符 在“边界”一章专门介绍

（2） 左上角函数 分别有上限函数、下限函数、同阶函数、渐近函数等

1.3.2 上限函数 ${}^{\le}1$ 及上限常数 ${}^{\le}\mathrm{C}$

若 $u(x)$ 的最大阶可表为 $U(x)$，用传统最大阶符号 $O(\ )$ 表达如下

$$\left.\begin{aligned}|u(x)| &\le CU(x)\\ u(x) &= O(U(x))\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

下面定义一个与最大阶符号 $O(\ )$ 功能相似，但更简捷的上限函数符号 $^{\le}1$

定义 8　函数 $u(x)$ 的最大阶，不大于某已知函数 $U(x)$ 的阶，称 $U(x)$ 是 $u(x)$ 的上限函数（supper function）；若 $u(x)$ 的值不能或不必确定正负时，记为 $\pm^{\le}1U(x)$ 或 $\pm^{\le}U(x)$，否则记为 $+^{\le}U(x)$ 或 $-^{\le}U(x)$。将符号 $^{\le}1$ 或 $^{\le}$，称为上限函数，它的变量隐含在函数 $U(x)$ 中（下同），即

$$u(x)=\begin{cases}\pm^{\le}U(x)\\ +^{\le}U(x)\\ -^{\le}U(x)\end{cases}\qquad\left(\begin{aligned}|u(x)|&<U(x)\\ 0<u(x)&<U(x)\\ -U(x)<u(x)&<0\end{aligned}\right) \tag{10}$$

上式中，当函数 $U(x)$ 是常数时，将 $^{\le}C$ 称为上限常数

1. 3.3　下限函数 $^{\ge}1$

若 $u(x)$ 的最小阶可表为 $U(x)$，用传统最小阶符号 $o(\ )$ 表达如下

$$\left.\begin{aligned}|u(x)| &\ge CU(x)\\ u(x) &= o(U(x))\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

下面定义一个与最小阶符号 $o(\ )$ 功能相似，但更简捷的下限函数符号 $^{\ge}1$

定义 9　函数 $u(x)$ 的最小阶，不小于某已知函数 $U(x)$ 的阶，称 $U(x)$ 是 $u(x)$ 的下限函数（lower function）。若 $u(x)$ 的值不能或不必确定正负时，记为 $\pm^{\ge}U(x)$，否则记为 $+^{\ge}U(x)$ 或 $-^{\ge}U(x)$，将符号 $^{\ge}1$ 或 $^{\ge}$，称为下限函数，即

$$u(x)=\begin{cases}\pm^{\ge}U(x)\\ +^{\ge}U(x)\\ -^{\ge}U(x)\end{cases}\qquad\left(\begin{aligned}|u(x)|&>U(x)\\ u(x)&>U(x)\\ u(x)&<-U(x)\end{aligned}\right) \tag{12}$$

上式中，当函数 $U(x)$ 是常数时，将 $^{\ge}C$ 称为下限常数

1.3.4 同阶函数 $^{\pm}1$

定义 10 若函数 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 与已知函数 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 之比的极限接近 1，即

$$\left|1-\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{\mathrm{U}(\mathrm{x})}\right| = 1 \qquad (13)$$

则将函数 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 称为 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 的同阶函数（Same order functions），可用同阶函数符号：$^{\pm}1$ 、$^{\pm}_{\psi}1$ 等将两者表达如下

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}) =^{\pm} \mathrm{U}(\mathrm{x}) =^{\pm}_{\psi} \mathrm{U}(\mathrm{x}) = \frac{^{\pm}u(x_0)}{\mathrm{U}(\mathrm{x}_0)}\mathrm{U}(\mathrm{x}) \quad (1 = \quad x_0) \qquad (14)$$

说明：

（1） $\mathrm{u}(\mathrm{x}) =^{\pm} \mathrm{U}(\mathrm{x})$ 是粗略表达，$\mathrm{u}(\mathrm{x}) =^{\pm} \mathrm{U}(\mathrm{x})\, u(x_0) \div \mathrm{U}(\mathrm{x}_0)$ 是较好表达式

（2） 左下标“ψ”，是同阶函数的名称，可用任何字符作名称，无名称的同阶函数不能比较大小，即等式中有多个表达相同、无名称的同阶函数时，不表示它们的值相同，使计算过程简洁明了

（3） 左上角符号“±”，称为同阶函数符号

（4） 已知函数 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 可以是字符、数值或函数

（5） 同阶函数“$^{\pm}1$”，与某量相乘时，可省略符号中的“1”，如 $^{\pm}1\,\mathrm{U}(\mathrm{x}) =^{\pm} \mathrm{U}(\mathrm{x})$，有时不能省略符号 $^{\pm}1$ 中的“1”，如它作为分数的分子时

（6） 利用同阶函数，可将两个比值满足以上条件的函数，用等号连接，并忽略高阶小量，方便近似计算及表达

（7） 同阶函数主要特征 A、它的值不易或不必准确确定（如无理数）；B、它的极限是常数

（8） 当同阶函数与有限个（同阶）函数， 进行各种运算得到不恒为零的函数时，也具有这两个特征，故也是同阶函数，可在任意一项对应位置标注一个同阶函数符号即可

（9） 叙述时用 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 接近于 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$，表示它们是互为同阶函数关系

（10） 对于多元函数 $\mathrm{u}(\mathrm{x}_n)$ 的同阶函数—— “$^{\pm}1$”的定义，与此类似，此略

（11） $^{\pm}1$ 的对数表达为：

$$\ln {}^{\pm}1 = C + {}^{\pm}\delta(x) \quad , \quad 0\le |C| = 1, \quad \lim_{x\to\infty} {}^{\pm}\delta(x) = 0$$

（12） 同阶函数与其它（同阶）函数进行四则运算，只需对函数部分直接运算，同阶函数的相对误差，即 $^{\pm}1=C\left[1+C_1(x)\right]$ 中 $C_1(x)$ 的阶，不大于参与计算的各个项相对比值的最小阶，如呈递小排列的多项式函数：$f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots, f_n(x)$，则

$$C_1(x) \le \left|f_n(x) \div f_1(x)\right|$$

（13）一般左上角函数的表达式未写出，它包含了所有与它有关的显函数中的变量

规定： 当 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 只有一项时，同阶函数 $^{\pm}1$ 的阶小于 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 的阶

说明： 以上某些性质，对本章定义的其它左上角函数有效

1.3.5 渐近函数 $^{1}1$

定义 11 若函数 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 与已知函数 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 之比的极限等于 1，则将函数 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 称为 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 的渐近函数（progressive functions），记为 $^{1}1\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 或 $^{1}\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 即

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{U(\mathrm{x})}=1 \\ \mathrm{u}(\mathrm{x}) = {}^{1}\mathrm{U}(\mathrm{x}) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

叙述时用 “趋近”或“几乎”等词，表示 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 与 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 两者是互为渐近函数关系

1.3.6 $^{\pm}1$ 与 $^{1}1$ 的比较

比较：

（1） 同阶函数 $^{\pm}1$ 与渐近函数 $^{1}1$ 都表示接近 1，但渐近函数 $^{1}1$ 的极限等于 1，同阶函数 $^{\pm}1$ 的极限接近 1，但不一定等于 1；$^{\pm}1$ 可以包含 $^{1}1$ ，$^{1}1$ 是 $^{\pm}1$ 的一个特例

（2） 渐近函数符号“$^{1}1$”的数学意义，与数论中传统表达符号“～”相似

（3） 无理数或趋近于无理数的量，可用与它值接近的带小数的量表达，如 $\pi = {}^{\pm}3.14159$ 、$^{1}\pi = {}^{\pm}3.14159$

定理 1 在 $\mathrm{x} \le \mathrm{N}$ 时，$\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 及 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 的求和值或积分值，记为 $\pi(\mathrm{u}(\mathrm{N}))$ 及 $\Pi(\mathrm{U}(\mathrm{N}))$，

$$\left.\begin{aligned}\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right) &= \sum_{x=1}^{N}\mathrm{u}\left(x\right) \\ \Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right) &= \int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

若 $\mathrm{U}(\mathrm{x})$ 是 $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ 的渐近函数，即

$$\mathrm{u}\left(\mathrm{x}\right) =^{1}\mathrm{U}\left(\mathrm{x}\right) \tag{17}$$

则 $\Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)$ 与 $\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right)$ 存在以下关系

1、若 $\lim_{N\to\infty}\Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)\to C\neq 0$，则

$$\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right) = \sum_{x=1}^{N}\mathrm{u}\left(x\right) =^{\pm} \Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right) =^{\pm} \int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx \tag{18}$$

2、若 $\lim_{N\to\infty}\Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)\to\infty$，则

$$\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right) = \sum_{x=1}^{N}\mathrm{u}\left(x\right) =^{1} \Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right) =^{1} \int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx \tag{19}$$

证明　由(16)、(17)得

$$\frac{\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right)}{\Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)} = \sum_{x=1}^{N}\mathrm{u}\left(x\right) \div \int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx = \sum_{x=1}^{N}{}^{1}\mathrm{U}\left(x\right) \div \int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx$$

$$=\left[\int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx + \Delta\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right)\right] \div \int_{1}^{\mathrm{N}}\mathrm{U}\left(x\right)dx = 1 + \Delta\pi\left(\mathrm{u}\left(\mathrm{N}\right)\right) \div \Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)$$

1、显然若 $\lim_{N\to\infty}\Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)\to C\neq 0$，上式满足同阶函数定义的条件(13)，得(18)式

2、显然若 $\lim_{N\to\infty}\Pi\left(\mathrm{U}\left(\mathrm{N}\right)\right)\to\infty$，上式满足渐近函数定义的条件(15)，得(19)式，证毕

1.3.7 渐近函数表达泰勒级数

定理 2

$$f\left(x\right) = \sum_{J=0}^{R-1}\frac{f^{(J)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^{J}}{J!} + \frac{{}^{1}f^{(R)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^{R}}{R!} \tag{20}$$

证明　函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 点的泰勒展开级数可表为

$$f(x)=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{f^{(J)}(x_0)(x-x_0)^J}{J!}=^{1}\sum_{J=0}^{R}\frac{f^{(J)}(x_0)(x-x_0)^J}{J!}$$

由渐近函数定义　当 $f(x)$ 有多项时，渐近函数 $^{1}1$ 的阶，小于函数 $f(x)$ 展开的泰勒级数中相对最低阶，得本定理

1. 3.8　$^{\pm}1$ 与 $^{1}1$ 的作用及性质

许多在充分大条件下才成立的定理，引入同阶函数或渐近函数后，在一般情况也成立。简化了叙述和表达

作用 1 渐近函数的几个重要的连接应用

1、 频率量 f(x)，与对应的概率量 F(x)

2、 实际值 f(x)，与对应的理论值 F(x)

3、 准确解 f(x)，与对应的渐近解 F(x)

上面三种情况均可表为

$$f(x)=^{1}F(x) \tag{21}$$

作用 2 求和值与对应的积分值，如

$$\sum_{J=a}^{x}f(J)=^{1}\int_a^x f(t)\,dt \tag{22}$$

以上符号“$^{\le}1$”、 “$^{\pm}1$”、“$^{1}1$”、“～”及传统符号“O(1)”等，本书都使用

1. 3.9 值的定义及表达

概素论与概率论，虽研究的对象不同，但处理问题的思路相似，除直接引用概率论命名的量外，再定义有关的量如下

定义 12 一般用首字母小写的字符串如 $h(x)$，表示某量实际出现值——实际值， 它等价于概率论中的频率，或与频率有关的量

定义 13　实际值 $h(x)$ 的平均值，称为实际平均值，记为 $\bar{h}(x)$，则

$$\bar{h}(x)=\sum_{t=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{h(x+t)}{2\sqrt{x}+1}\quad(1=x) \tag{23}$$

定义 14 实际值 $h(x)$ 在(a,b)的平均值，记为 $\bar{h}(a,b)$，定义如下：

$$\bar{h}(a,b)=\sum_{J=a}^{b}\frac{h(J)}{b-a+1} \tag{24}$$

定义 15 用首字母大写的对应字符串 $H(x)$，表示 $h(x)$ 的理论值，理论值 $H(x)$ 是实际值 $h(x)$ 的最可几值，它等价于概率论中的概率，或与概率有关的量，规定 $H(x)$ 满足以下三个条件

(1)

$$H(x) = {}^{1}\bar{h}(x) \tag{14}$$

(2) $H(x)$ 是一条靠近 $h(x)$ 分布区域重心的曲线，故 $h(x)$ 较均匀对称地分布在曲线 $H(x)$ 的两侧

(3) $H(x)$ 是一条可积可微的连续平滑曲线

定义 16 用 ${}^{\oplus}L(x)$ 表示 $h(x)$ 偏离 $H(x)$ 的最大值，即

$$\left|h(x) - H(x)\right| \le^{\oplus} L(x)$$

则

$$h(x) = H(x) \pm^{\oplus} L(x)$$

其中 符号 $\oplus$ 可用 ${}^{\le}1$ 、${}^{\pm}1$ 、${}^{1}1$ 及后面将介绍的边界符号 1 等函数表达

素数定理可表为

$$\pi(x) \quad = \prod(x) \pm^{\oplus} L(x)$$

由于实际值 $h(x)$ 分布在一个区域内，后面将用边界、概率分布函数等量，进一步定量描述本节实际值、实际平均值、理论值等的定义、表达及性质等，普适本书的任何量

1.4 一般问题的解

1.4.1 准确解

解可分为准确解 a(x)，及近似解 A(x)

定义 17 将满足方程或条件的值，称为该议程或条件的准确解

前者严格满足要求，后者近似满足要求。 当准确解暂不能获得时，力求通过近似模型，从理论上获得近似解

近似解分类 近似解 A(x)又可分为上限解、同阶解及渐近解等

1.4.2 上限解

定义 18 当准确解 a(x) 的上限可表为$O(A(x))$时，即

$$a(x) =^{\leq} A(x) = O(A(x))$$

将$^{\leq} A(x)$、$O(A(x))$称为 a(x) 的上限解

1.4.3 同阶解

定义 19 当准确解 a(x) 可用同阶函数$^{\pm} A(x)$表达时，即

$$a(x) =^{\pm} A(x)$$

将$^{\pm} A(x)$称为$a(x)$的同阶解

1.4.4 渐近解

定义 20   当准确解 a(x) 趋近于函数$A(x)$时，即

$$a(x) =^{1} A(x)$$

将$^{1} A(x)$称为$a(x)$ 的渐近解

1.5 素数分类

1.5.1 狭义素数和广义素数

素数分为狭义素数和广义素数，分别定义如下：

定义 21 不能被 1 及本身之外的数整除的整数，称为狭义素数，就是一般所说的素数

定义 22 变量t在定义域取值的过程中，与素数有关的某指定条件$Q(t)$被满足一次，就称为出现了一个广义素数

从上面狭义及广义素数的定义中，函数$Q(t)$既可作为狭义素数，也可作为广义素数来研究，但条件$Q(t)$只能作为广义素数来研究，故下面研究广义素数时，常附带包含函数$Q(t)$等的情况

下面所说的素数，一般包括了狭义素数和广义素数

凡涉及素数的数学问题，统称素数问题

素数问题又可分为整数变量素数问题，素数变量素数问题，及条件素数问题三类，定

义如下

定义 23　若函数 $f(n)$ 中有多个素数，称此函数 $f(n)$ 是素数函数

定义 24　由整理变量 n，构成的素数函数 $f(n)$ 问题，称为整理变量素数问题

定义 25　由素数变量 p，构成的素数函数 $f(p)$ 问题，称为素数变量素数问题

定义 26　涉及素数的条件约束下构成的问题，称为条件素数问题

如哥德巴赫猜想

书中用“狭义”和“广义”对某些素数问题进行分类时，有时不能或不必严格地分为那一类

1.5.2 J 维 K 元函数素数问题

定义 27　当素数问题是由 J 个子函数或条件，构成素数问题“组”的形式出现时，将条件或子函数的个数 J， 称为素数问题的维数,素数问题中含的变量个数 K，称为函数的元

1.6 等几公理

经过统计分析发现，能够把素数的分布规律，用概率统计的方法进行描述，如我们让素数表[1]P87 中的数据，较均匀地分布在一条拟合曲线的两侧，则偏离似合曲线较远的点，其偏离值正比于该点值的平方根，它与等几随机事件的分布规律是等价的，可将这一现象抽象成以下的定义

定义 28 当某确定事件的出现呈无简单规律，且它们分布的统计规律，等价或几乎等价于随机事件时，将此确定事件称为等价随机事件

1.6.1 样本空间及概率空间

定义 29 在概率确定论中，全部发生事件称为全体事件，如某范围内的自然数、数码或分布格点空间；在全体事件中，指定某种属性的事件，称为指定事件。如该范围的素数、指定数码、该空间内的格点数

下面常以素数为例，对概率确定论中的量，进行定义、分析及计算等；对某些量而言，将素数换成数码或格点，就得到概率数码论及概率格点论中，相似的定义、分析及计算等

定义 30　在概率确定论的问题中，变量或条件的每个取值点（一维）或每个取值组（多维），称为样本点，所有样本点的集合，称为样本空间。与概率论中的概率空间或样本空间等价，以后一般使用概率空间

又可将概率空间，分为完备概率空间和非完备概率空间，分别定义如下

定义 31 某一簇概率空间系列，能包含全部指定事件时，称它为完备概率空间，否则称为非完备概率空间。自然数及等差数列均是素数的完备概率空间

还可将概率空间，分为狭义概率空间和广义概率空间，分别描述狭义素数和广义素数的所有分布可能，并可仿照上面给出严格定义，此略

1.6.2 等几公理——原则性公理

公理 1 在任何概率空间的合理大小范围内，发生无简单规律的确定事件——等价随机事件，我们约定：它们几乎等价于等几随机分布，将此约定称为确定事件等几随机公理，简称等几公理

这是一条原则性公理，下面将由此派生三个子公理：素数公理、数码公理、格点公理，由此建立三个素数论分支：概率素数论、概率数码论、概率格点论

1.6.3 素数公理

它对整数函数中出现素数的问题，进一步明确约定如下

公理 2 在合理大小范围内，素数函数中出现素数的概率，几乎正比于同等大小自然数的素数概率。将此约定称为素数均分公理，简称素数公理。它是等机公理在素数问题中的表达形式

此公理所说的素数，包括狭义素数及广义素数，素数公理是《概率素数论》的基石

1.6.4 素率系数

定义 32 素数函数出现素数的概率，与同等大小自然数的素数概率的比值，称为素数函数的素数概率系数，简称素率系数或素数率系数

1.6.5 素数均分定理

素数公理对素数出现的规律，作了一般而笼统的约定：素数概率几乎正比于同等大小的自然数的素数概率，目前本方法无法对所有素数问题，给出这个比例常数，仅能在下面定义的均分问题中，给出这个值为 [1]1 的比例常数，素数论中有的方法能给出个别条件下更精确的素率系数[13]，值得本方法借鉴并借此寻找突破口

定义 33 在任何素数问题中，当素数概率几乎等于同等大小的自然数的素数概率时，称这类素数问题，叫素数均分问题，否则称为素数非均分问题

定理 3

（1）、概率空间中所有点的素数概率均大于零时，该素数问题是素数均分问题，素数率几乎等于同等大小自然数的素数率——素率系数是渐近函数；

（2） 、概率空间中部分点的素数概率等于零时，该素数问题是素数非均分问题，此类问题的概率系数平均值大于 1，少数小于 1，多数大于 1。

证明 （1） 由于在概率空间中，发生素数事件的概率均大于零，又由于素数公理的约束，使一定范围内发生素数事件的概率几乎相等，使每一个素数事件出现素数的概率，几乎等于它附近自然数的素数，从而得出它是均分问题的结论

（2） 当概率空间中部分点的素数概率等于零时，由于素数公理的约束，原本应该分配在这些点的素数，多数情况将分配在概率空间中的其它点上，使那些点的素数率大于同等大小自然数的素数率——使同类问题的素数率平均值大于 1；但由于素数分布在少数情况下，将出现严重的不均匀性——少得出奇或多得出奇，在这两种极端情况下，因非均匀性而增加的素数率，仍无法改变“少数小于 1”这一事实，但增加了大于 1 的比例，故得“少数小于 1，多数大于 1”的结论，证毕

1.7 素数率

1.7.1 素数频率及概率

素数率分为素数频率及素数概率两种，每一种又可分为狭义素数率和广义素数率，可组合成 4 种素数率，定义如下

定义 34 在某概率空间Ω内，出现素数的实际及理论个数，记为$\pi(\Omega)$及，$\Pi(\Omega)$，则一维素数频率$\rho(\Omega)$及素数概率 $P(\Omega)$，定义为

$$\begin{cases} \rho(\Omega)=\pi(\Omega)-\pi(\Omega-1) \\ P(\Omega)=\lim_{t\to 0}\frac{\Pi(\Omega)-\Pi(\Omega-t)}{t}=\frac{d\,\Pi(\Omega)}{d\Omega} \end{cases} \tag{26}$$

类似可定义多维概率空间的素数率，此略（下同）

素数频率$\rho(\Omega)$，可分为在某一点x的素数频率$\rho(x)$，其值是零或 1，及某一区间$a\le\Omega\le b$的平均值$\overline{\rho}(a\le\Omega\le b)$两种，在一维素数问题的概率空间中定义如下

$$\begin{cases} \rho(x)=\pi(x)-\pi(x-1) & (\Omega=x) \\ \overline{\rho}(a\le\Omega\le b)=\frac{\pi(b)-\pi(a-1)}{b-a+1} & (a\le\Omega\le b) \end{cases} \tag{27}$$

素数概率$P(\Omega)$是素数频率$\rho(\Omega)$的最可几值——理论值，它与素数频率的关系，由“值的定义”一节确定

$$\left.\begin{aligned} \overline{\rho}(x) &= {}^{1}P(x) \\ P(x) &= {}^{1}\,\overline{\rho}(x) \qquad (1=x) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

定义 35 狭义概率空间中的元素，出现狭义素数的可能，称为它的狭义素数概率，当该元素是素数时，它的狭义素数频率为 1；否则它的狭义素数频率为零

定义 36 在广义概率空间中的元素，满足广义素数条件的可能，称为它的广义素数概率。

定义 37 当广义概率空间中的某元素是素数时，称它的广义素数频率为 1；否则称它的广义素数频率为零，依平均值的定义，可定义平均广义素数频率

以下将狭义素数及广义素数，简称为素数； 狭义素数率及广义素数率，简称素数率

1.7.2 函数或条件的素数率定义

函数素数问题与条件素数问题的解决方法相似

定义 38 某一维概率空间的素数函数，或广义素数条件可表为$H(t)$，在$t\le N$时，满足函

数或条件$H(t)$的素数个数记为$\pi(H(N))$及$\Pi(H(N))$，满足函数或条件$H(t)$的素数率表为$\rho(H(t))$、$\overline{\rho}(H(t))$及$P(H(t))$；若有特征量x时(下同)，素数个数及素数率等记为$\pi(H(N,x))$、$\Pi(H(N,x))$、$\rho(H(t,x))$、$\overline{\rho}(H(t,x))$及$P(H(t,x))$，定义如下

$$\rho(H(t))=\pi(H(t))-\pi(H(t-1)) \tag{29}$$

$$\overline{\rho}(H(t))=\sum_{j=t-\sqrt{t}}^{t+\sqrt{t}}\frac{\pi(H(j))-\pi(H(j-1))}{2\sqrt{t}+1} \quad (1=t) \tag{30}$$

$$P(H(t))=\frac{\partial\,\Pi(H(t))}{\partial t}=^{1}\overline{\rho}(H(t)) \qquad (1=t) \tag{31}$$

$$\pi(H(N))=\sum_{t\le N}\rho(H(t)) \tag{32}$$

$$\prod(H(N))=\int^{N}P(H(t))\,dt=^{1}\pi(H(N)) \tag{33}$$

$$\rho(H(t,x))=\pi(H(t,x))-\pi(H(t-1,x)) \tag{34}$$

$$\overline{\rho}(H(t,x))=\sum_{j=t-\sqrt{t}}^{t+\sqrt{t}}\frac{\pi(H(j,x))-\pi(H(j-1,x))}{2\sqrt{t}+1} \quad (1=t) \tag{35}$$

$$P(H(t,x))=\frac{\partial\,\Pi(H(t,x))}{\partial t}=^{1}\overline{\rho}(H(t,x)) \tag{36}$$

$$\pi(H(N,x))=\sum_{t\le N}\rho(H(t,x)) \tag{37}$$

$$\prod(H(N,x))=\int^{N}P(H(t,x))\,dt=\,^{1}\pi(H(N,x)) \tag{38}$$

将此定义下的$\rho(H(\mathrm{t}))$、$\overline{\rho}(H(\mathrm{t}))$、$P(H(\mathrm{t}))$，称为素数函数或条件——广义素数的素数率

在后面的实际问题计算中，常直接使用上面关系

1. 7.3 自然数的素数率

在后面“第三章 自然数素数问题”一章中，将专门介绍两种计算自然数素数率的方法，为叙述方便，先将这两个结果罗列如下。一个结果粗略，简称粗率；另一个结果精确，简称精率，粗率表为

$$P(t) = \frac{{}^{1}1}{\ln t} \tag{39}$$

精率表为

$$P(t) = \frac{1}{\ln t} - \sum_{J=2}^{3} \frac{t^{\frac{1-J}{J}}}{J \ln t} + O\left(\frac{t^{\frac{-4}{5}}}{\ln t}\right) \tag{40}$$

应用中一般仅使用粗率

1.7.4 函自素数率

定义 39 在函数 $H(\mathrm{t})$ 附近自然数的素数率，称为函自素数率。

定理 4 用 $\overset{\circ}{\rho}(H(\mathrm{t}))$、$\overset{\vec{s}}{\rho}(H(\mathrm{t}))$、$\overset{\circ}{P}(H(\mathrm{t}))$ 表示在函数 $H(\mathrm{t})$ 附近自然数的素数率——函自素频率、平均函自素频率及函自素概率，则

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{\rho}(H(\mathrm{t})) &= \pi(H(\mathrm{t})) - \pi(H(\mathrm{t})-1) \\ \overset{\vec{s}}{\rho}(H(\mathrm{t})) &= \frac{\pi\left(H(\mathrm{t})+\sqrt{H(\mathrm{t})}\right) - \pi\left(H(\mathrm{t})-\sqrt{H(\mathrm{t})}\right)}{2\sqrt{H(\mathrm{t})}+1} \quad \begin{pmatrix} 1 = t \\ 1 = \sqrt{H(\mathrm{t})} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\overset{\vec{s}}{P}(H(\mathrm{t})) = \left.\frac{\partial \Pi(y)}{\partial y}\right|^{y=H(\mathrm{t})} = \frac{{}^{1}1}{\ln H(\mathrm{t})} \quad \begin{pmatrix} 1 = t \\ 1 = \sqrt{H(\mathrm{t})} \end{pmatrix} \tag{42}$$

证明 (41) 由函自素数率的定义 63 及平均值的定义 (23) 得出，(42) 的证明由 (31) 及 (39) 得出，证毕

1.7.5 函数或条件的素数率定理

定理 5 将变量 t 及表为 $H(t)$ 的函数或条件的素数率，分别记为 $P(t)$ 及 $P(H(t))$，则

$$P(H(\mathrm{t})) = \frac{{}^{\pm}C}{\ln H(\mathrm{t})} \tag{18}$$

证明 由素数公理（公理 2）及函自素数概率 (42) 得

$$P(H(\mathrm{t})) = {}^{\pm}C\overset{\vec{s}}{P}(H(\mathrm{t})) = \frac{{}^{\pm}C}{\ln H(\mathrm{t})}$$

1.8 素数均分函数

1.8.1 整数变量均分函数

定义 40 整数变量 x 取自然数，当 a 是任意整数，函数 $H(x)$ 及 $H(x)+a$ 中的素数个数，均不恒为零时，由素数公理知：素数在函数簇 $H(x)+a$ 中是平均分布的，将此函数称为整数变量均分函数，否则称为整数变量非均分函数

推理 1 自然数是 $H(x)=x$ 的整数变量均分函数

推理 2 当 a 是无理数时，取整函数 $H(x)=[ax]+b$ 是整数变量均分函数

推理 3 当 b 是整数时，函数 $H(x)=x^2+b$ 是整数变量非均分函数，

因当 $b=-c^2$ 时， $H(x)=x^2-c^2=(x+c)(x-c)$ 恒为合数

1.8.2 素数变量均分函数

仿照上面“整数变量均分函数”定义的原理，可给出素数变量均分函数定义

定义 41 素数变量函数 $H(p)$ 中，当 p 是任意函数 $f(n)$ 的素数 $p=f(n)$ 时，$H(f(n))$ 中的素数个数，均不恒为零，由素数公理知： 素数在函数簇 $H(p)$ 中是平均分布的，将此 $H(p)$ 称为素数变量均分函数， 否则称为素数变量非均分函数

推理 4 素数函数 $\pi(x-p)$ 是素数变量均分函数

推理 5 素数函数 $2p+1$ 是数变量非均分函数.因 $p=2n^2-1$ 时，因

$2p+1=2(2n^2-1)+1=(2n+1)(2n-1)$ 恒为合数

1.8.3 广义均分问题

定义 42 条件或函数 $H(t)$ 中出现广义素数的概率，如果几乎等于同等大小自然数的素数概率时，将此条件或函数 $H(t)$ 称为广义素数均分函数，简称广义均分函数；否则称为广义素数非均分条件或函数，简称广义非均分条件或函数

1. 8.4 广义均分条件或函数组

定义 43 广义素数条件或函数组$\left\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\right\}$ $(1 \le J \le s)$ 中的元素$\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$，全部相互独立时：将条件或函数组$\left\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\right\}$ 称为广义素数均分条件或函数组，简称广义均分条件或函数组；当条件或函数组$\left\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\right\}$ 只有部分相互独立时，将条件或函数组$\left\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\right\}$ 称为广义素数非均分条件或函数组，简称广义非均分条件或函数组

1. 8.5 广义均分函数确定原则

当理论上不能确定$\mathrm{P}_J\left(\mathrm{H}(\mathrm{x})\right)$是否相互独立时，应暂以广义非均分函数处理，用实际数据可初步检验$^{\pm}C = {}^{1}1$是否成立，来推测否相互独立，从而找到证明的方向

1. 8.6 函数的素数率定理

自然数的素数率，是函数$H(t) = t$ 的素数率的一个特例；利用素数公理、自然数素数率及是否是均分函数，可获得一般函数$H(t)$ 的素数率

定理 6 含有素数的一般整值或取整函数$H(t)$ 的素数概率，记为$\mathrm{P}\left(\mathrm{H}(\mathrm{t})\right)$，则

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{H}(\mathrm{t})\right) = \frac{^{\pm}C}{\ln \mathrm{H}(\mathrm{t})} \qquad (1)$$

其中 $^{\pm}C$ 可称为素数率系数

1）、当$H(t)$ 是均分函数时， $^{\pm}C = {}^{1}1$；

2）、当$H(t)$ 是非均分函数时，一般有$^{\pm}C \ne {}^{1}1$，$^{\pm}C$ 的平均值$\overline{^{\pm}C}$ 大于 1：$\overline{^{\pm}C} > 1$，故多数情况$^{\pm}C > 1$，少数情况$^{\pm}C < 1$，书中后面的数据，也支持这些理论结论，但$^{\pm}C = {}^{1}1$的概率是不为零的，即它的逆命题不成立，但机会少

证明 由“函数或条件的素数率”一节的定理得(44)，下面说明$^{\pm}C$：

由均分函数定义及素数公理知 素数在均分函数中的分布，几乎与在自然数中的分布是等价的，故素数率系数$^{\pm}C$ 与 1 几乎是等价的，即 $^{\pm}C = {}^{1}1$；当$H(t)$ 是非均分函数时，

一部分函数簇$H(t)+a$ 中的素数个数恒为零， 在素数公理的约束下，原应分配在这部分函数簇中的素数，只能分配在其余有素数的 函数簇中，使有素数的函数簇中的平均素数密度，大于同等大小的自然数的素数密度：$\overline{{}^{\pm}C}>1$，来保证整个函数簇的平均素数密度，几乎等于自然数的素数密度，其于结论的证明与前面相似定理的证明相仿，此略

1. 8.7 广义素数的素数率定理

定理 7 在条件或函数组$\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\}$ $(1\le J\le s)$的每个元素$\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$中，出现广义素数的概率记为$P(\mathrm{H}_J(\mathrm{x}))$， $\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$同时是广义素数时的概率记为$P(\mathrm{H}(\mathrm{x}))$，则

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}(\mathrm{x}))=C\prod_{J=1}^{S}\mathrm{P}(\mathrm{H}_J(\mathrm{x}))=\prod_{J=1}^{S}\frac{{}^{\pm}1_J}{\ln H_J(\mathrm{t})}={}^{\pm}C\prod_{J=1}^{S}\frac{1}{\ln H_J(\mathrm{t})} \qquad (45)$$

${}^{\pm}C$ 或${}^{\pm}1_J$可称为相关系数，

1、当条件或函数组$\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\}$是广义均分函数组，，每个条件或函数$\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$又是广义均分函数时，得 ${}^{\pm}C={}^{1}1$

2、 否则，系数${}^{\pm}C$的平均值$\overline{{}^{\pm}C}$大于 1：$\overline{{}^{\pm}C}>1$，即多数情况大于 1，少数情况小于 1

证明 1、由概率论可知 多个独立事件$\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$，同时发生的概率$\mathrm{P}(\mathrm{H}(\mathrm{x}))$，等于各个独立事件概率$\mathrm{P}(\mathrm{H}_J(\mathrm{x}))$之积，并引用“函数或条件的素数率”一节中的定理得

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}(\mathrm{x}))=C\prod_{J=1}^{S}\mathrm{P}(\mathrm{H}_J(\mathrm{x}))=\prod_{J=1}^{S}\frac{{}^{\pm}1_J}{\ln H_J(\mathrm{t})}={}^{\pm}C\prod_{J=1}^{S}\frac{1}{\ln H_J(\mathrm{t})}$$

故当$\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$均是广义均分函数时，得

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}(\mathrm{x}))=\prod_{J=1}^{S}\mathrm{P}(\mathrm{H}_J(\mathrm{x}))=\prod_{J=1}^{S}\frac{{}^{1}1}{\ln H_J(\mathrm{t})}$$

得${}^{\pm}C={}^{1}1$

2、当$\mathrm{H}_J(\mathrm{x})$中仅部分函数相互独立，则至少有某一个函数$\mathrm{H}_R(\mathrm{x})$非独立，即$\mathrm{H}_R(\mathrm{x})$的值与 x 无关， 使$\mathrm{H}_R(\mathrm{x})$的广义素数频率$\rho(\mathrm{H}_R(\mathrm{x}))$恒为零或 1

$$\rho\left(\mathrm{H}_R(\mathrm{x})\right)=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

当$\rho\left(\mathrm{H}_R(\mathrm{x})\right)=0$时，相当于这部分条件或函数组$\left\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\right\}$ 的相关系数为零

$$\prod_{J=1}^{S}{}^{\pm}C_J=0$$

在素数公理的约束下，原本该分配在这些函数组的广义素数，只能分配在$\rho\left(\mathrm{H}_{J\neq R}(\mathrm{x})\right)=1$的函数组中，使这部分函数组$\left\{\mathrm{H}_J(\mathrm{x})\right\}$的相关系数${}^{\pm}C$的平均值$\overline{{}^{\pm}C}$大于1：且多数大于1，少数小于1，证毕

1. 8.8 素数定理定义

定义44 素数定理指素数出现的规律，可分为自然数素数定理、函数素数定理及广义素数定理等。每种素数定理，又分为实际素数定理和理论素数定理等，这里说的规律包括某范围的概率分布函数，素数个数，均方差及下面要介绍的边界等量的集合，它将目前说的“素数定理”的概念，进行了扩展和外延。其中，自然数素数定理是函数素数定理的特例，函数素数定理是自然数素数定理的推广。故“自然数素数定理”和“函数素数定理”可统称为狭义素数定理

定义45 在$t\le N$内的函数或条件$H(t)$中，出现狭义或广义素数的规律，定义为狭义或广义素数定理，$H(t)$ 的素数率记为$\rho(H(t))$、$P(H(t))$，素数个数实际值及理论值分别表为$\pi(H(N))$及$\Pi(H(N))$，则

$$\pi(H(N))=\sum_{t\le N}\rho(H(t))=^{1}\Pi(H(N)) \tag{46}$$

$$\Pi(H(N))=\int^{N}P(H(t))\,dt \tag{47}$$

在素数定理中， 当具有特征量x时，它们的个数可记为$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$，它们的归一化概率分布函数可记为$\rho(N,x)$、$P(N,x)$,则

$$\pi(N,x)=\pi(N)\rho(N,x) \tag{48}$$

$$\Pi(N,x)=\Pi(N)P(N,x) \tag{49}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty}\rho\left(N,x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}P\left(N,x\right)dx=1 \qquad (50)$$

1.9　整数率

1.9.1 一维整值函数整数率

若分析的目标函数需满足两个条件　1 是整值函数；2 变量是整数，如不定方程等，就涉及到在整值函数条件的约束下，变量在其定义域取的每一个值能否取整数，或取整数的概率问题。我们给出以下定义

定义 46　整值函数的变量在定义域内取整数的概率，称为整值函数变量的整数率，简称整数率

定理 8　一维一元整值函数y的变量 x 的整数率，记为$I\left(y\right)$或$I\left(f\left(x\right)\right)$，则

$$I\left(f\left(x\right)\right)=\frac{{}^{1}1}{f'\left(x\right)} \qquad (51)$$

证明　变量 x 取整数后再取$x+1$时，整值函数$f\left(x\right)$将跨越

$$f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=^{1}\frac{df\left(x\right)}{dx}=^{1}f'\left(x\right) \qquad (52)$$

个整数区间。若整值函数$f\left(x\right)$须先满足其它条件后，才让整值函数$f\left(x\right)$的变量x再取第二个值$x+a$时，函数$f\left(x+a\right)$的值将等几率地落在区间$\left(f\left(x\right)+1,f\left(x+1\right)\right)$内的每个整数上，落在$f\left(x+1\right)$上的概率，即变量$x+a$取整数$x+1$的概率$I\left(f\left(x\right)\right)$，等于

$$\frac{1}{f\left(x+1\right)-f\left(x\right)}=\frac{{}^{1}1}{f'\left(x\right)}$$

得$\left(51\right)$，证毕

定理 9　一维 m 元整值函数

$$y=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)=f\left(x_j\right)\quad\left(x_{R-1}<x_R,1\le j\le m\right) \qquad (53)$$

的变量$\left\{x_j\right\}$的整数率，记为$I\left(y\right)$或$I\left(f\left(x_j\right)\right)$，则

$$I\left(y\right)=I\left(f\left(x_j\right)\right)=^{1}\left[\frac{\partial f\left(x_j\right)}{\partial x_m}\right]^{-1} \qquad (54)$$

证明　　用较简洁的方式分析如下

因 $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 这 $m-1$ 个取值较小的变量，在各自的定义域内可任意取值，不受整值函数——不定方程 (53) 的约束，只有取值最大一个变量 x_m 受 (53) 的约束，类比 (51) 、(52) 可得 (54) 。其实，可用任何一个变量 x_j 代替 x_m，得到类似于 (54) 的表达式，但在以后的使用中，x_j 定义域的计算和表达式，没有 x_m 定义域的计算和表达式简洁

1. 9.2 二维整值函数整数率

定理 10　二维 m 元整值函数

$$y_i = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_m) \end{cases} = f_i(x_j) \quad \begin{pmatrix} x_{R-1} < x_R \\ 1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le m \end{pmatrix} \tag{55}$$

的变量 $\{x_j\}$ 的整数率，记为 $I(y_i)$ 或 $I(f_i(x_j))$，则

$$I(y_i) = I(f_i(x_j)) =^{1} \left(\frac{\partial f_1(x_j)}{\partial x_m} \frac{\partial f_2(x_j)}{\partial x_m} \right)^{-1} =^{1} \left(\prod_{i=1}^{2} \frac{\partial f_i(x_j)}{\partial x_m} \right)^{-1} \tag{56}$$

证明　y_1 或 $f_1(x_j)$ 的变量 $\{x_j\}$ 的整数率，记为 $I_1(y_1)$ 或 $I_1(f_1(x_j))$，类似则 (2) 得

$$I_1(y_1) = I_1(f_1(x_j)) =^{1} 1 \div \frac{\partial f_1(x_j)}{\partial x_m} =^{1} \left[\frac{\partial f_1(x_j)}{\partial x_m} \right]^{-1} \tag{57}$$

同理得

$$I_2(y_2) = I_2(f_2(x_j)) =^{1} 1 \div \frac{\partial f_2(x_j)}{\partial x_m} =^{1} \left[\frac{\partial f_2(x_j)}{\partial x_m} \right]^{-1} \tag{58}$$

因 $I_1(y_1)$ 、$I_2(y_2)$ 相互独立，两者同时成立的概率为 $I(y_j)$，等于各维整数率 $I_1(y_1)$ 、$I_2(y_2)$ 之积

$$I(y_J) = I_1(y_1) I_2(y_2) = \prod_{i=1}^{2} I_i(y_i)$$

由 (57) 、(58) 代入上式得 (56)

1. 9.3 K 维整值函数的整数率

定理 11 K 维 m 元整值函数

$$y_i = \begin{cases} y_1 = f_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_m\right) \\ y_2 = f_2\left(x_1, x_2, \cdots, x_m\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k = f_k\left(x_1, x_2, \cdots, x_m\right) \end{cases} = f_i\left(x_j\right) \quad \begin{pmatrix} x_{R-1} < x_R \\ 1 \le i \le k \\ 1 \le j \le m \end{pmatrix} \tag{59}$$

的变量$\left\{x_j\right\}$的整数率，记为$I\left(y_i\right)$或$I\left(f_i\left(x_j\right)\right)$，则

$$I\left(y_i\right) = I\left(f_i\left(x_j\right)\right) =^1 \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i\left(x_j\right)}{\partial x_m}\right)^{-1} \tag{60}$$

证明 与(7)的证明过程类似，此略

1.10 概率论知识

（1）、数学期望

数学期望是最可几值或加权平均值

定义 随机事件记为 ξ，其数学期望记为$E\xi$，变量、随机变量及概率分布函数，分别记为x，$f\left(x\right)$，则

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f\left(x\right) dx \tag{61}$$

对密度矩阵为$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots\cdots \\ p_0 & p_1 & \cdots\cdots \end{pmatrix}$的离散型随机事件$\xi$，则

$$E\xi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i \tag{62}$$

（2）、方差 及均方差

方差 及均方差分别记为$D\xi$，$\sigma\left(\xi\right)$，其定义如下

定义

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E\xi\right)^2 f\left(x\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f\left(x\right) dx - \left(E\xi\right)^2 = \sigma^2\left(\xi\right) \tag{63}$$

$$D\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i - E\xi \right)^2 p_i \tag{64}$$

方差$D_j\xi$及均方差$\sigma_j(\xi)$之和

$$D\xi = \sum_{j=0}^{\infty} D_j \xi \tag{65}$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2(\xi)} \tag{66}$$

引理　随机事件ξ在(a,b)内平均分布的均方差，记为$\sigma(a,b)$，则

$$\sigma(a,b) = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} \tag{67}$$

证明　随机事件ξ的概率分布函数$f(x)$及平均值$E\xi$，可表为：

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad (a \le x \le b)$$

$$E\xi = \frac{a+b}{2}$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E\xi)^2 = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{x^3}{3(b-a)} \Bigg|_{x=a}^{x=b} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2(a,b)$$

上式开方得引理所需结果

第二章　边界

2. 1　边界概念

这里只对足够多的有限次试验进行边界的讨论，一般将本章中称为极限的量理解成最大偏差

由于概率数素论需要断定某些量的极限，或对某些概率事件发生与否，给出一个肯定的答案，因此，拓展这一方法及概率论的应用范围就显得非常必要，下面通过建立边界来实现 一目的。它既补充和发展了概率论，又对概率论提出了新的课题。如重对数定理给出了贝努力型试验在极限条件下，“最大可能值”—— 理论边界的上限，但由于不知道如何计算贝努力型试验在极限条件及一般条件下，“最大可能值”—— 理论边界的下限，制约了概率素数论的应用范围。下面给出了值域边界及平均值边界，“最大可能值”—— 理论边界的计算方法，但边界的分布——概率分布函数仍未获得。随着概率论不断完善和发展，及这些问题的解决，可通过《概率素数论》探讨更多的素数问题

本书描述边界时，主要针对素数等数论有关的事件中，若作相应变换，可用在概率论中

一般随机事件中，存在一个概率分布函数，且进行足够多次试验时，可以怀疑某些特殊情况发生的可能性：如出生足够多的婴儿过程中，连续出生男婴或女婴的个数，将形成一个概率分布函数，属贝努力试验模型，有理由猜测这个分布函数存在最小最大值，至少最大值大于 1，即出生足够多婴儿，很难想象均是按一男一女出生，同时，也很难想象最大值接近某个与试验次数接近的函数。但目前的概率论并不能给出这个极限，它认为所有的可能都存在，这显然难以让人接受。本章提供了解决这个问题的一个思路，并获得了若干得到实际数据支持的结果

定义 1 进行若干次试验，事件 A 偏离平均值的极限，称为它的边界，其中小于平均值的极限，称为下界；大于平均值的极限，称为上界。实际极限称为实际边界，理论极限称为理论边界。在对称概率分布函数中的上界等于下界，统称对称边界

由边界的定义不难看出：在边界的计算中，边界被放大后，不违反边界定义，边界仍然成立，故仍可用等号连接放大后的边界

当把随机试验的数据分成若干组进行统计，每一组的上界或下界，不尽相同，即上界或下界都存在一个概率函数分布，将它称为边界概率分布函数。既然随机事件的概率分布函数有最小值（下界）、最大值（上界）及平均值，同理，边界也存在最小值、最大值及平均值，分别定义及表达如下

定义 2 在若干组边界数据的统计中，边界分布的极限，称为广义边界，其中，下界的最小值称为最小下界，上界的最小值称为最小上界，下界的最大值称为最大下界，上界的最大值称为最大上界，下界的平均值称为平均下界，上界的平均值称为平均上界

将最小下界及最小上界统称最小边界，最大下界及最大上界统称最大边界，平均下界及平均上界统称平均边界。

2. 1.1　值域边界

定义 3 进行若干次随机试验，指定事件 A 发生的次数偏离理论值的极限，称为值域边界。

定义 4 进行 n 次随机试验，事件 A 出现的次数记为 $m(n)$、$M(n)$，当 $m(n)$、$M(n)$ 偏离它的理论值 $M(n)$ 的下限记为 ${}^{\downarrow}m(n)$、${}^{\downarrow}M(n)$，上限记为 ${}^{\uparrow}m(n)$、${}^{\uparrow}M(n)$，即

$$M(n)-{}^{1\downarrow}M(n)=M(n)-{}^{\downarrow}m(n)\le m(n)\le M(n)+{}^{\uparrow}m(n)=M(n)+{}^{1\uparrow}M(n)$$

将它们称为一维值域边界，其中 ${}^{\downarrow}m(n)$、${}^{\downarrow}M(n)$ 称为下界，${}^{\uparrow}m(n)$、${}^{\uparrow}M(n)$ 称为上界，简称边界

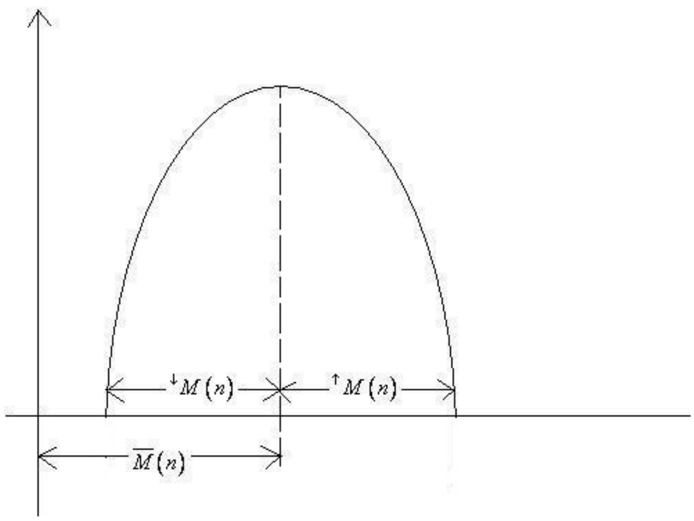
将上下边界中的最大值或对称边界，记为 $m(n)$、$M(n)$，即

$$\left.\begin{aligned} m(n)&=Max\left\{{}^{\downarrow}m(n),{}^{\uparrow}m(n)\right\}\\ M(n)&=Max\left\{{}^{\downarrow}M(n),{}^{\uparrow}M(n)\right\}\end{aligned}\right\}$$

或在对称边界中有

$$\left.\begin{aligned} m(n)&={}^{\downarrow}m(n)={}^{\uparrow}m(n)\\ M(n)&={}^{\downarrow}M(n)={}^{\uparrow}M(n)\end{aligned}\right\}$$

边界示意图如下



边界示意图

在广义边界中，最小下界、最小上界、最大下界、最大上界、最小对称边界、最大对称边界、平均值下界、平均值上界、平均值对称边界及平均值，可分别表为 ${}^{\downarrow}_{\min}M(n)$、${}^{\uparrow}_{\min}M(n)$、

${}^{\downarrow}_{\max}M(n)$、${}^{\uparrow}_{\max}M(n)$、${}_{\min}M(n)$、${}_{\max}M(n)$、${}^{\downarrow}_{aver}M(n)$、${}^{\uparrow}_{aver}M(n)$、${}_{aver}M(n)$、$\overline{M}(n)$，由广义边界定义得

$$\left.\begin{array}{l} {}^{\downarrow}_{\min}M(n) \le {}^{\downarrow}m(n) \le {}^{\downarrow}_{\max}M(n) \\ {}^{\uparrow}_{\min}M(n) \le {}^{\uparrow}m(n) \le {}^{\uparrow}_{\max}M(n) \end{array}\right\}$$

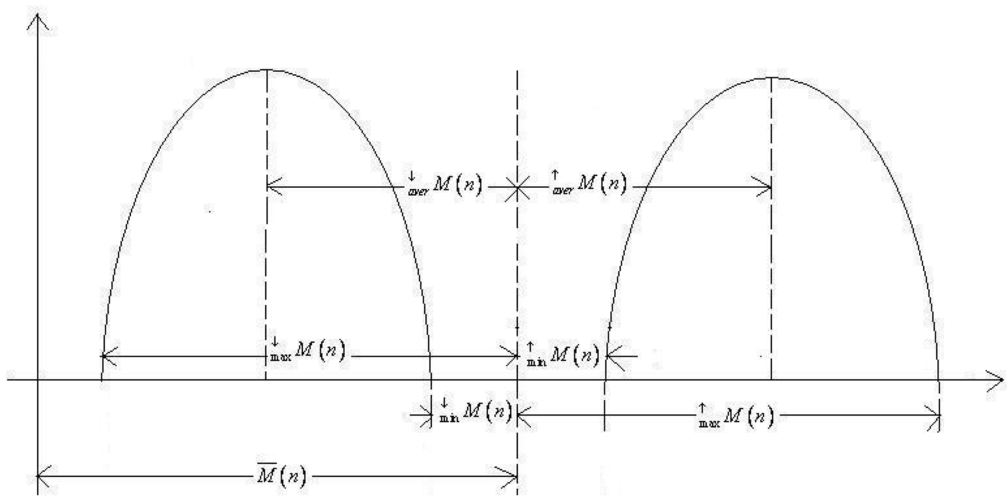
在最大边界中，有如下关系

$$\left.\begin{array}{l} {}_{\max}m(n) = Max\left\{ {}^{\downarrow}m(n), {}^{\uparrow}m(n) \right\} \\ {}_{\max}M(n) = Max\left\{ {}^{\downarrow}_{\max}M(n), {}^{\uparrow}_{\max}M(n) \right\} \end{array}\right\}$$

在对称广义边界中，有如下关系

$$\left.\begin{array}{l} {}_{\min}M(n) = {}^{\downarrow}_{\min}M(n) = {}^{\uparrow}_{\min}M(n) \\ {}_{\max}M(n) = {}^{\downarrow}_{\max}M(n) = {}^{\uparrow}_{\max}M(n) \\ {}_{aver}M(n) = {}^{\downarrow}_{aver}M(n) = {}^{\uparrow}_{aver}M(n) \end{array}\right\}$$

广义边界示意图如下



广义边界示意图

由于值域边界是以计算概率分布函数累计值的极限为目的，由此命名；同理，下面介绍的定义域边界，也是以计算自变量的取值范围——定义域的极限为目的，故命名为定义域边界

2. 1.2 定义域边界

定义 5 当指定事件 A 发生的次数是指定次数时，所需试验次数的极限，称为此条件所决定的定义域边界

我们一般需要第一次，或最后一次指定事件 A 发生时，所需要进行的试验次数，具体定义如下

边界按类型可分为　值域边界、定义域边界、广义边界、值域比值边界共四类；按计算方法可分为重对数法、平均值法两种。其中用重对数法计算的是值域边界，且是广义边界中的最大边界：${}_{\max}^{\downarrow}M(n)$、${}_{\max}^{\uparrow}M(n)$、${}_{\max}M(n)$；用平均值法计算的是定义域边界，且是广义边界中的平均值边界：${}_{aver}^{\downarrow}M(n)$、${}_{aver}^{\uparrow}M(n)$、${}_{aver}M(n)$，显然可用边界的名称区别目前能计算的这两种广义边界，下面的叙述中将取消左下标的函数名。

一般随机试验的值域边界，可用重对数法估值；任何边界，如果能确定其边界附近的概率分布函数，就可用平均值法获得定义域平均值边界，也可用近似的概率分布函数，进行计算以获得近似解，分别介绍如下

值域边界为解决哥德巴赫猜想等问题提供了一种可能途径；定义域边界为解决连续出生男婴或女婴的最多次数、相邻素数最大间距等问题提供了一个方法

2. 1.3 边界公理

在边界公理中，对概率事件某些量的值作了界定，否定了超越的可能，并给出条件的具体内容。边界公理也可称为零事件公理，分为有限边界公理和无限边界公理，定义如下

定义 6 在有限值范围内约定的边界公理，称为有限边界公理；在无限范围内约定的边界公理，称为无限边界公理

有限边界公理 1　在指定条件下，进行无限次等机随机试验时，事件 A 仅发生有限次，则约定：进行有限次相同试验时，事件 A 实际发生的次数为零。

无限边界公理 2 在无限次随机试验中，事件 A 发生的概率之和足够小时，事件 A 实际发生的次数为零。

从研究的范围来分，将边界分为有限边界和无限边界，定义如下：

定义 7 在有限范围内得到的边界结果，称为有限边界

定义 8 在无限范围内得到的边界结果，称为无限边界

边界因包含的自变量个数，分为一元或多元边界；边界因涉及的条件个数，分为一维或多维边界；根据计算边界的原理，将边界分为重对数边界、平均值边界及值域比值边界

等，根据边界界定的对象，将边界分为值域边界及定义域边界，分别定义如下

定义 9 根据重对数定理得出的值域边界，称为重对数值域边界，简称重对数边界

定义 10 根据随机试验发生的平均值等于指定次数时，试验次数的极限，称为平均值定义域边界，简称平均值边界

定义 11 根据值域相对值，即实际值与理论值之比，出现最大偏差值得出的边界，称为值域比值边界

2. 2　重对数值域边界

2. 2.1 重对数定理

引理 1　进行 n 次贝努力（Bernoulli）型等几随机试验，第 i 次可表达为 ξ_i ，发生概率为 p，发生的次数为 η_n ，即

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \tag{1}$$

则当 n 趋于无穷大时，下式

$$\left|\eta_n - np\right| \le \sqrt{2np(1-p)\ln\ln n} \tag{2}$$

不成立仅有限次，但

$$\left|\eta_n - np\right| \le (1+\varepsilon)\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n} \tag{3}$$

将有无限次不成立，此引理就是重对数定理[5]P177

证明　略

从概率论可知，η_n 值的分布是对称的，由它界定的对称分布的边界就是对称边界。记为 η_n ，且有

$$\eta_n = {}^{\downarrow}\eta_n = {}^{\uparrow}\eta_n$$

2.2.2 贝努力试验重对数值域边界

由于重对数定理对事件 A 发生的累计值，即值域作出界定，由此给出以下定义：

定义 12 由重对数定理得到的值域边界，称为重对数值域边界，简称重对数边界

定理 1 进行 n 次贝努里（Bernoulli）型等几随机试验，指定事件发生的概率为 P，发生的实际次数、理论次数，分别记为 $\pi(n)$ （或 η_n ）、$\Pi(n)$，均方差记为 $\sigma(n)$，即[4]P174

$$\pi(n) = \eta_n =^1 \Pi(n) =^1 nP \tag{4}$$

$$\sigma(n) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\Pi(n)(1-p)} =_1 \sqrt{\pi(n)(1-p)} \tag{5}$$

由重对数定理界定 $m(n)$ 、$M(n)$ 的重对数值域实际边界、理论边界，可分别记为 ${}^{\uparrow}\eta_n$、${}^{\uparrow}m(n)$、${}^{\uparrow}M(n)$，则

$${}^{\uparrow}\eta_n = {}^{\uparrow}m(n) =^{1\uparrow} M(n) =^1 \sqrt{2np(1-p)\ln\ln n} \ge \left|m(n) - np\right| \tag{6}$$

$${}^{\uparrow}M(n) =^1 \sqrt{2\ln\ln n}\ \sigma(n) \tag{7}$$

证明　由有限边界公理1，及引理1的(2)得(6)，由(5)及(6)得(7)

2.2 .3 边界均方差定理

定义13 由同一随机因素产生的多个随机事件集合，称为同类随机事件集合，简称同类随机事件

如素数在任意函数中的分布，服从某概率函数的分布等，均是同类随机事件

在(7)中，看到贝努力型试验的边界$^{\uparrow}M(n)$，是以$^{1}\sqrt{2\ln\ln n}$为比例，正比于均方差$\sigma(n)$的，可将这一原理推广到一般情况

定理2 在同类随机事件中，边界几乎以$^{1}\sqrt{2\ln\ln n}$为比例，正比于它的均方差

证明　由于同类随机事件的概率分布函数的形状相似，由概率分布函数决定的均方差及边界，将同比例增减，如相似三角形的对应边长成比例一样，故边界以$^{1}\sqrt{2\ln\ln n}$为比例系数，正比于它的均方差，证毕

定理3 在$t \le n$的自然数t中，素数个数、重对数值域边界及均方差，分别记为$\pi(n)$、$^{\uparrow}\pi(n)$、$\sigma(\pi(n))$；在$t \le n$的函数$H(t)$中，素数个数、重对数值域边界及均方差，分别记为$\pi(H(n))$、$^{\uparrow}\pi(H(n))$、$\sigma(H(n))$，在贝努力型试验中的重对数值域边界及均方差分别记为$^{\uparrow}\eta_n$、$\sigma(n)$，则

$$^{\uparrow}\pi(n) = {}^{1}\sqrt{2\ln\ln n}\ \ \sigma(\pi(n)) \tag{8}$$

$$^{\uparrow}\pi(H(n)) = {}^{1}\sqrt{2\ln\ln n}\ \ \sigma(\pi(H(n))) \tag{9}$$

证明　在后面“自然数的素数个数”一节将看到，将素数事件近似成贝努力型试验模型所得结果，得到实际数据支持。故素数事件与贝努力型试验，几乎是同类随机事件。由“边界均方差定理”：在同类随机事件中，边界几乎正比于它的均方差，及(7)得

$$^{\uparrow}\pi(n) : {}^{\uparrow}\eta_n = \sigma(\pi(n)) : \sigma(n) \tag{10}$$

$$^{\uparrow}\pi(n) = \frac{^{\uparrow}\eta_n}{\sigma(n)}\sigma(\pi(n)) = \frac{^{1}\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n}}{\sqrt{n\,p(1-p)}}\sigma(\pi(n)) \tag{11}$$

整理上式得定理中$^{\uparrow}\pi(n)$的表达式，同理

$$^{\uparrow}\pi(H(n)) : {}^{\uparrow}\eta_n = \sigma(\pi(H(n))) : \sigma(n) \tag{12}$$

$$^{\uparrow}\pi\left(H\left(n\right)\right)=\frac{^{\uparrow}\eta_{n}}{\sigma\left(n\right)}\sigma\left(\pi\left(H\left(n\right)\right)\right)=\frac{^{1}\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n}}{\sqrt{n\,p\left(1-p\right)}}\sigma\left(\pi\left(H\left(n\right)\right)\right) \tag{13}$$

整理上式，得定理中$^{\uparrow}\pi\left(H\left(n\right)\right)$的表达式，证毕

2. 2.4 近似重对数值域边界

可将重对数值域边界，应用在一般随机试验的值域边界中，获得其近似结果

定义 14 将一般随机试验近似成贝努力（Bernoulli）型等几随机试验，计算其近似的重对数值域边界，由此获得的边界，称为随机试验近似重对数值域边界，简称近似重对数边界

定理 4 设进行第$t\leq n$次某随机试验$H\left(t\right)$时，发生指定事件的次数、均方差及近似重对数值域边界，分别记为$\pi\left(H\left(n\right)\right)$、$\sigma\left(H\left(n\right)\right)$、$^{\uparrow}\pi\left(H\left(n\right)\right)$，则

$$\sigma\left(H\left(n\right)\right)=^{\pm}\sqrt{\pi\left(H\left(n\right)\right)\left[1-\pi\left(H\left(n\right)\right)\div n\right]} \tag{14}$$

$$^{\uparrow}\pi\left(H\left(n\right)\right)=^{\pm}\sqrt{2\pi\left(H\left(n\right)\right)\left[1-\pi\left(H\left(n\right)\right)\div n\right]\ln\ln n}=^{\pm}\sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma\left(H\left(n\right)\right) \tag{15}$$

其中 可用$\Pi\left(H\left(n\right)\right)$代替$\pi\left(H\left(n\right)\right)$

证明 平均概率记为$\overline{F}\left(H\left(n\right)\right)$，将随机试验近似成贝努力等几随机试验模型进行处理，则

$$\overline{F}\left(H\left(n\right)\right)=\pi\left(H\left(n\right)\right)\div n$$

用$\overline{F}\left(H\left(n\right)\right)$近似代替$\left(7\right)$中的概率$p$，从而可以使用$\left(7\right)$对$^{\uparrow}\pi\left(H\left(n\right)\right)$进行估值得$\left(15\right)$，并由$\left(15\right)$及$\left(9\right)$得$\sigma\left(H\left(n\right)\right)$的估值$\left(14\right)$，由于是近似方法故值，乘一个同阶函数因子“$^{\pm}$”，证毕

2. 3 平均值定义域边界

2. 3.1 一维平均值定义域边界

平均值定义域边界，简称平均值边界

一维平均值实际下界

平均值实际边界，又分为平均值实际下界，及平均值实际上界，一维平均值实际边界定义如下

定义 15　素数函数 $H(t)$ 出现素数的频率，记为 $\rho(H(t))$，$H(t)$ 在 $t\in(-\infty,a)$ 内出现素数的实际个数，记为 $\pi(H(t\le a))$，$H(t)$ 中出现素数的个数，记为 $\pi(H(-\infty<t<\infty))$，在

$$\pi(H(-\infty<t<\infty)) = \sum_{-\infty<t<\infty} \rho(H(t)) \tag{16}$$

$$\pi(H(x\le a)) = \sum_{t\le a} \rho(H(t)) = 1 \tag{17}$$

$$\pi(H(x\le a-1)) = \sum_{t=-\infty}^{t=a-1} \rho(H(t)) = 0 \tag{18}$$

条件下得到的 a 值，称为平均值实际下界，可记为 $^{\downarrow}t$

一维平均值理论下界

平均值理论边界分为平均值理论下界、平均值理论上界及平均值理论对称边界。由“零事件公理”并仿照“平均值实际下界”，对一维平均值理论下界定义如下（下同）：

定义 16　函数 $H(t)$ 在 $t\in(-\infty,A)$ 内，出现素数的概率记为 $P(H(t))$，出现素数的概率之和—素数的理论平均个数，记为 $\Pi(H(t\le A))$，　$H(t)$ 中出现素数的理论个数记为 $\Pi(H(-\infty<t<\infty))$，在

$$\Pi(H(-\infty<t<\infty)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(H(t))\,dt \tag{19}$$

$$\Pi(H(t\le A)) = \int_{-\infty}^{A} P(H(t))\,dt = 1 \tag{20}$$

条件下得到的 A 值，称为平均值理论下界，可记为 $^{\downarrow}T$

由于是根据理论平均值出现一个素数为原则，定义的平均值理论边界，它表示该点 $^{\downarrow}T$ 实际出现素数的个数 $\pi(H(-\infty,{}^{\downarrow}T))$，等于 1 的可能性最大，由于在 $^{\downarrow}T$ 附近的概率分布函数近似于线性变化，使该点 $^{\downarrow}T$ 的实际素数个数 $\pi(H(-\infty,{}^{\downarrow}T))$，不出现素数与出现两个素数是等几率的，即平均值实际边界点 $^{\downarrow}t$，将等几率地分布在该理论点 $^{\downarrow}T$ 的两侧，故该点是实际边界分布区域的中心，即平均值，故称为平均值理论下界（下同）

命名为“平均值实际边界”的目的，是为了以此为模型，定义出与之对应的“平均值理论边界”，后者是根据实际边界分布的平均值——最可几值，来界定其理论边界（下同）

一维平均值实际上界

定义 17 素数函数$H(t)$出现素数的频率记为$\rho(H(t))$，$H(t)$在$t\in(b,\infty)$内出现素数的实际个数，记为$\pi(H(x\geq b))$，在

$$\pi(H(x\geq b))=\sum_{t\geq b}\rho(H(t))=1 \tag{21}$$

$$\pi(H(x\geq b+1))=\sum_{t\geq b+1}\rho(H(t+1))=0 \tag{22}$$

条件下得到的b值，称为平均值实际上界，可记为$^{\uparrow}t$

定理 5 素数函数$H(t)$只在定义域实际上下界$({}^{\downarrow}t,{}^{\uparrow}t)$内，出现素数

证明　在素数函数$H(t)$中，出现素数的总数，记为$\pi(H(-\infty<t<\infty))$，则

$$\pi(H(-\infty<t<\infty))=\pi(H(t\leq{}^{\downarrow}t-1))+\pi(H({}^{\downarrow}t\leq t\leq{}^{\uparrow}t))+\pi(H(t\geq{}^{\uparrow}t+1))$$

$$=0+\pi(H({}^{\downarrow}t\leq t\leq{}^{\uparrow}t))+0=\pi(H({}^{\downarrow}t\leq t\leq{}^{\uparrow}t))$$

证毕，本定理可推广多维情况，此略

一维平均值理论上界

定义 18　素数函数$H(t)$出现素数的概率，记为$P(H(t))$，在$t\in(B,\infty)$内出现素数的概率之和——素数的理论个数，记为$\Pi(H(t\geq B))$，在

$$\Pi(H(-\infty<t<\infty))=\int_{-\infty}^{\infty}P(H(t))\,dt \tag{23}$$

$$\Pi(H(t\geq B))=\int_{B}^{\infty}P(H(t))\,dt=1 \tag{24}$$

条件下得到的 B 值，称为平均值理论上界，可记为$^{\uparrow}T$

2.3.2　二维平均值定义域边界

二维平均值实际下界

定义 19　二维素数函数$H(N,t)$出现素数的频率，记为$\rho(H(N,t))$，$H(N,t)$在

$t \in (-\infty, a)$ 中出现素数的实际个数，记为 $\pi(H(N, t \le a))$， $H(N,t)$ 中出现素数的个数，记为 $\pi(H(N))$，在

$$\pi(H(N)) = \sum_{-\infty < t < \infty} \rho(H(N,t)) \tag{25}$$

$$\pi(H(N, t \le a)) = \pi(H(N)) \sum_{t \le a} \rho(H(N,t)) = 1 \tag{26}$$

$$\pi(H(N, t \le a-1)) = \pi(H(N)) \sum_{t \le a-1} \rho(H(N,t)) = 0 \tag{27}$$

$$\pi(H(N,t)) = \pi(H(N))\, \rho(H(N,t)) \tag{28}$$

条件下得到的 a 值，称为二维平均值实际下界，可记为 ${}^{\downarrow}t(N)$

二维平均值理论下界

定义 20　二维函数 $H(N,t)$ 出现素数的概率，记为 $P(H(N,t))$， $H(N,t)$ 中出现素数的理论个数记为 $\Pi(H(N))$，即

$$\Pi(H(N)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(H(N,t))\,dt \tag{29}$$

$H(N,t)$ 在 $t \in (-\infty, A)$ 内，出现素数的概率之和，即素数的理论个数，记为 $\Pi(H(N, t \le A))$，在

$$\Pi(H(N, t \le A)) = \Pi(H(N)) \int_{-\infty}^{A} P(H(N,t))\,dt = 1 \tag{30}$$

$$\Pi(H(N,t)) = \Pi(H(N))\, P(H(N,t)) \tag{31}$$

条件下得到的 A 值，称为二维平均值理论下界，可记为 ${}^{\downarrow}T(N)$

二维平均值实际上界

定义 21　二维素数函数 $H(N,t)$ 出现素数的频率，记为 $\rho(H(N,t))$， $H(N,t)$ 在 $t \in (b, \infty)$ 内出现素数的实际个数，记为 $\pi(H(N, t \ge b))$，在

$$\pi(H(N, t \ge b)) = \pi(N) \sum_{t \ge b} \rho(H(N,t)) = 1 \tag{32}$$

$$\pi\left(H\left(N,t\geq b+1\right)\right)=\pi\left(N\right)\sum_{t\geq b+1}\rho\left(H\left(N,t\right)\right)=0 \tag{33}$$

$$\pi\left(H\left(N,t\right)\right)=\pi\left(N\right)\rho\left(H\left(N,t\right)\right) \tag{34}$$

条件下得到的b值，称为二维平均值实际上界，可称记为$^{\uparrow}t\left(N\right)$

二维平均值理论上界

定义 22　二维函数$H\left(N,t\right)$出现素数的概率，记为$P\left(H\left(N,t\right)\right)$，$H\left(N,t\right)$在$t\in\left(B,\infty\right)$内，出现素数的概率之和，即素数的理论个数，记为$\Pi\left(H\left(N,t\geq B\right)\right)$，在

$$\Pi\left(H\left(N\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}P\left(H\left(N,t\right)\right)dt$$

$$\Pi\left(H\left(N,t\geq B\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)\int_{B}^{\infty}P\left(H\left(N,t\right)\right)dt=1 \tag{35}$$

$\Pi\left(H\left(N,t\right)\right)=\Pi\left(N\right)P\left(H\left(N,t\right)\right)$条件下得到的 B 值，称为二维平均值理论上界，可记为$^{\uparrow}T\left(N\right)$

2. 3.3 三维平均值定义域边界

定义 23 将具有 3 个量N、x、y且表为$H\left(N,x,y\right)$的素数函数，称为三维素数函数。

三维平均值实际下界

定义 24　三维素数函数$H\left(N,x,y\right)$出现素数的频率，记为$\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right)$，$H\left(N,x,y\right)$在$y\in\left(-\infty,\infty\right)$中出现素数的实际个数，记为$\pi\left(H\left(N,x\right)\right)$，$H\left(N,x,y\right)$在$y\in\left(-\infty,a\right)$中出现素数的实际个数，记为$\pi\left(H\left(N,x,y\leq a\right)\right)$，在

$$\pi\left(H\left(N,x\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{-\infty<y<\infty}\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right) \tag{36}$$

$$\pi\left(H\left(N,x,y\leq a\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{y\leq a}\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right)=1 \tag{37}$$

$$\pi\left(H\left(N,x,y\leq a-1\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{y\leq a-1}\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right)=0 \tag{38}$$

$$\pi\left(H\left(N,x,y\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right) \tag{39}$$

条件下得到的 a 值，称为三维平均值实际下界 ，可记为$^{\downarrow}y\left(N,x\right)$

三维平均值理论下界

定义 25　三维素数函数 $H\left(N,x,y\right)$ 出现素数的概率，记为 $P\left(H\left(N,x,y\right)\right)$，$H\left(N,x,y\right)$ 在 $y\in\left(-\infty,\infty\right)$ 中出现素数的理论个数，记为$\Pi\left(H\left(N,x\right)\right)$，$H\left(N,x,y\right)$ 在 $y\in\left(-\infty,A\right)$ 中出现素数的理论个数，记为$\Pi\left(H\left(N,x,y\le A\right)\right)$，在

$$\Pi\left(H\left(N,x\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)\int_{-\infty}^{\infty}P\left(H\left(N,x,y\right)\right)dy \tag{40}$$

$$\Pi\left(H\left(N,x,y\le A\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)\int_{-\infty}^{A}P\left(H\left(N,x,y\right)\right)dy=1 \tag{41}$$

$$\Pi\left(H\left(N,x,y\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)P\left(H\left(N,x,y\right)\right) \tag{42}$$

条件下得到的 A 值，称为三维平均值理论下界 ，可记为$^{\downarrow}Y\left(N,x\right)$

三维平均值实际上界

定义 26　三维素数函数 $H\left(N,x,y\right)$ 出现素数的频率，记为 $\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right)$，$H\left(N,x,y\right)$ 在 $y\in\left(-\infty,\infty\right)$ 中出现素数的实际个数，记为$\pi\left(H\left(N,x\right)\right)$，$H\left(N,x,y\right)$ 在 $y\in\left(B,\infty\right)$ 中出现素数的实际个数，记为$\pi\left(H\left(N,x,x\ge B\right)\right)$，在

$$\pi\left(H\left(N,x\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{-\infty<y<\infty}\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right) \tag{43}$$

$$\pi\left(H\left(N,x,y\ge b\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{y\ge b}\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right)=1 \tag{44}$$

$$\pi\left(H\left(N,x,y\ge b+1\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{y\ge b+1}\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right)=0 \tag{45}$$

$$\pi\left(H\left(N,x,y\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\rho\left(H\left(N,x,y\right)\right) \tag{46}$$

条件下得到的 b 值，称为三维平均值实际上界 ，可记为$^{\uparrow}y\left(N,x\right)$

三维平均值理论上界

定义 27　三维素数函数 $H(N,x,y)$ 出现素数的概率，记为 $p(H(N,x,y))$，$H(N,x,y)$ 在 $y\in(-\infty,\infty)$ 中出现素数的理论个数，记为 $\Pi(H(N,x))$，$H(N,x,y)$ 在 $y\in(B,\infty)$ 中出现素数的理论个数，记为 $\Pi(H(N,x,y\geq B))$，在

$$\Pi(H(N,x))=\Pi(H(N))\int_{-\infty}^{\infty}P(H(N,x,y))\,dy \tag{47}$$

$$\Pi(H(N,x,y\geq B))=\Pi(H(N))\int_{B}^{\infty}P(H(N,x,y))\,dy=1 \tag{48}$$

$$\Pi(H(N,x,y))=\Pi(H(N))\,P(H(N,x,y)) \tag{49}$$

条件下得到的 B 值，称为三维平均值实际上界 ，可记为 $^{\uparrow}Y(N,x)$

以此类推，可定义多维平均值边界如下

2. 3.4 u 维平均值定义域边界

u 维平均值实际下界

定义 28 将具有一个参数 N 及 $u-1$ 个参变量 $t_1,t_2,\cdots t_{u-1}$ 且表为 $H(N,\langle t_{u-1}\rangle)$ 的素数函数，称为 u 维素数函数。它的平均值边界，称为 u 维平均值边界

显然二维素数函数可表为 $H(N,\langle t_1\rangle)$，与上面二维素数函数 $H(N,t)$ 的表达等价，其对应量均等价

定义 29　u 维素数函数 $H(N,\langle t_{u-1}\rangle)$ 出现素数的频率，记为 $\rho(H(N,\langle t_{u-1}\rangle))$，$H(N,\langle t_{u-1}\rangle)$ 在 $t_{u-1}\in(-\infty,\infty)$ 中出现素数的实际个数，记为 $\pi(H(N,\langle t_{u-2}\rangle))$，$H(N,\langle t_{u-1}\rangle)$ 在 $t_{u-1}\in(-\infty,a)$ 中出现素数的实际个数，记为 $\pi(H(N,\langle t_{u-1}\leq a\rangle))$，在

$$\pi(H(N,\langle t_{u-2}\rangle))=\pi(H(N))\sum_{-\infty<t_{u-1}<\infty}\rho(H(N,\langle t_{u-1}\rangle)) \tag{50}$$

$$\pi(H(N,\langle t_{u-1}\leq a\rangle))=\pi(H(N))\sum_{t_{u-1}\leq a}\rho(H(N,\langle t_{u-1}\rangle))\;=1 \tag{51}$$

$$\pi(H(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\leq a-1\rangle))=\pi(H(N))\sum_{t_{u-1}\leq a-1}\rho(H(N,\langle t_{u-1}\rangle))\;=0 \tag{52}$$

$$\pi(H(N,\langle t_{u-1}\rangle))=\pi(H(N))\,\rho(H(N,\langle t_{u-1}\rangle)) \tag{53}$$

条件下得到的 a 值，称为 u 维平均值实际下界 ，可记为 $^{\downarrow}t_{u-1}(N,\langle t_{u-2}\rangle)$

其中：$\pi\left(H\left(N,\langle t_0\rangle\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)$

u 维平均值理论下界

定义 30　u 维素数函数 $H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 出现素数的概率，记为 $P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)$，$H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 在 $t_{u-1}\in\left(-\infty,\infty\right)$ 中出现素数的概率——理论个数，记为 $\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)\right)$，$H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 在 $t_{u-1}\in\left(-\infty,A\right)$ 中出现素数的理论个数，记为 $\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\le A\rangle\right)\right)$，在

$$\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)\int_{-\infty}^{\infty}P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)dt_{u-1} \quad (54)$$

$$\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\le A\rangle\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)\int_{-\infty}^{A}P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)dt_{u-1}=1 \quad (55)$$

$$\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right) \quad (56)$$

条件下得到的 A 值，称为 u 维平均值理论下界 ，可记为${}^{\downarrow}T_{u-1}\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)$

其中：$\Pi\left(H\left(N,\langle t_0\rangle\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)$

u 维平均值实际上界

定义 31　u 维素数函数 $H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 出现素数的频率，记为 $\rho\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)$，$H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 在 $t_{u-1}\in\left(b,\infty\right)$ 中出现素数的实际个数，记为 $\pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\ge b\rangle\right)\right)$，带 $u-2$ 个参变量的素数定理记为 $\pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)\right)$，在

$$\pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{-\infty<t_{u-1}<\infty}\rho\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right) \quad (57)$$

$$\pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\ge b\rangle\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{t_{u-1}\ge b}\rho\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)=1 \quad (58)$$

$$\pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\ge b+1\rangle\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\sum_{t_{u-1}\ge b+1}\rho\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)=0 \quad (59)$$

$$\pi\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)\rho\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right) \quad (60)$$

条件下得到的 b 值，称为 u 维平均值实际上界 ，可记为${}^{\downarrow}t_{u-1}\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)$

u维平均值理论上界

定义32　u维素数函数 $H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 出现素数的概率，记为 $P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)$，$H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)$ 在 $t_{u-1}\in\left(B,\infty\right)$ 中出现素数的理论个数，记为 $\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\geq B\rangle\right)\right)$，带 $u-2$ 个参变量的素数理论个数记为 $\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)\right)$，在

$$\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)\int_{-\infty}^{\infty}P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)dt_{u-1}\qquad(61)$$

$$\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-2},t_{u-1}\geq B\rangle\right)\right)=\Pi\left(N\right)\int_{B}^{\infty}P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)dt_{u-1}=1\qquad(62)$$

$$\Pi\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)=\Pi\left(H\left(N\right)\right)P\left(H\left(N,\langle t_{u-1}\rangle\right)\right)\qquad(63)$$

条件下得到的B值，称为u维平均值实际上界 ，可记为 ${}^{\uparrow}T_{u-1}\left(N,\langle t_{u-2}\rangle\right)$

其中：$\pi\left(H\left(N,\langle t_0\rangle\right)\right)=\pi\left(H\left(N\right)\right)$

平均值理论边界，是实际边界平均值的最可几值

由上面对边界的定义等，可求出任意概率分布函数的近似重对数边界、平均值边界，其方法相似。下面计算正态分布函数及指数分布函数的平均值边界

2.4　边界的应用

2. 4.1　正态分布函数的边界

本书涉及的正态分布函数分为两种：标准正态分布函数及单边正态分布函数，这里计算这两种正态分布函数的边界。

定义33　定义域大于零且归一化的正态分布函数，　称为单边正态分布函数。在归一化条件下，它的值是对应标准正态分布函数值的两倍

定理6　正态分布函数，记为 $P_n\left(N,x,C\right)$，有

$$P_n\left(N,x,C\right)=\frac{C}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n\left(N\right)}\exp\left(\frac{-x^2}{2\ \sigma_n^2\left(N\right)}\right)\ \left(\sigma_n\left(N\right)=\frac{2\sqrt{2\pi}\ N}{4\Pi\left(N\right)}\right)\qquad(64)$$

式中，　$P_n\left(N,x,1\right)$ 是标准的正态分布函数，$P_n\left(N,x,2\right)$ 单边正态分布函数，它们的均方差，记为 $\sigma_n\left(N,C\right)$，并 $\sigma_n\left(N,1\right)$ 写成标准形式 $\sigma_n\left(N\right)$　。值域边界的近似重对数值

域边界，记为$^{\uparrow}\pi_n(N,C)$， x 的平均值定义域边界记为$^{\downarrow}X_n(N,C)$、$^{\uparrow}X_n(N,C)$，当 N 足够大时得

$$\sigma_n(N,C)=\sqrt{C}\,\sigma_n(N) \tag{65}$$

$$^{\uparrow}\pi_n(N,C)=^{1}\sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma_n(N,C)=^{1}\sqrt{2C\ln\ln n}\,\sigma_n(N) \tag{66}$$

$$^{\downarrow}X_n(N,C)=^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N)}{C\Pi(N)} \tag{67}$$

$$^{\downarrow}X_n(N,C)=^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N)}{\Pi(N)}=^{1}\frac{\pi N}{\Pi^2(N)}\quad\begin{pmatrix}\text{标准正态分布}\\ C=1\end{pmatrix} \tag{68}$$

$$^{\downarrow}X_n(N,C)=^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N)}{2\Pi(N)}=^{1}\frac{\pi N}{2\Pi^2(N)}\quad\begin{pmatrix}\text{单边正态分布}\\ C=2\end{pmatrix} \tag{69}$$

$$^{\uparrow}X_n(N,C)=^{1}\sqrt{2\ln N}\,\sigma_n(N)=^{1}\sqrt{\pi\ln^3 N} \tag{70}$$

证明　正态分布的方差$\sigma_n^2(\pi(N,C))$，计算如下

$$\sigma_n^2(\pi(N,C))=\int_{-\infty}^{\infty}x^2P_n(N,x,C)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Cx^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N)}\exp\left(\frac{-x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}\right)dx$$

$$=\frac{C\sigma_n^2(N)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy=-\frac{C\sigma_n^2(N)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}y\,d\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{C\sigma_n^2(N)}{\sqrt{2\pi}}\left\{-y\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy\right\}=C\sigma_n^2(N)$$

由此可得$\sigma_n(N,C)$的表达式

由“近似重对数值域边界”，即

$$^{\uparrow}\pi(n)=^{1}\sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma(\pi(n))$$

对正态分布的近似重对数值域边界$^{\uparrow}\pi(N,C)$进行计算：

$$^{\uparrow}\pi(N,C)=^{1}\sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma_n(N,C)=^{1}\sqrt{2C\ln\ln n}\,\sigma_n(N)$$

得$^{\uparrow}\pi(N,C)$的表达式

对正态分布的平均值边界$^{\downarrow}X(N,C)$、$^{\uparrow}X(N,C)$进行计算：

由二维平均值理论下界$^{\downarrow}X(N,C)$定义，计算单边正态分布的下界或标准正态分布零

点附近的边界$^{\downarrow}X(N,C)$，注意近似计算条件：

$$0 \le \frac{x^2}{\sigma_n^2(N,C)} = 1$$

得

$$\Pi_n\left(N, x \le {}^{\downarrow}X(N,C)\right) = \int_0^{{}^{\downarrow}X(N,C)} \Pi(N) P_n(N,x,C)\,dx$$

$$= \int_0^{{}^{\downarrow}X(N,C)} \frac{\Pi(N)C}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)} \exp\left(\frac{-x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}\right) dx$$

$$= \int_0^{{}^{\downarrow}X(N,C)} \left[\frac{{}^{1}\Pi(N)C}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)}\left(1 - \frac{x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}\right)\right] dx$$

$$= \frac{{}^{1}\Pi(N)C}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)}\left({}^{\downarrow}X(N,C) - \frac{{}^{\downarrow}X(N,C)^3}{6\,\sigma_n^2(N)}\right) = 1$$

$${}^{\downarrow}X(N,C) = \frac{{}^{1}\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)}{\Pi(N)C}\left(1 + \frac{{}^{\downarrow}X(N,C)^2}{6\,\sigma_n^2(N)}\right)$$

$$= \frac{{}^{1}\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)}{\Pi(N)C}\left(1 + \frac{\pi}{3\Pi^2(N)C^2}\right) = \frac{{}^{1}\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)}{\Pi(N)C}$$

得本定理$^{\downarrow}X(N,C)$的表达式。

同理：由二维平均值理论上界定义，得

$$\Pi_n\left(N, x \ge {}^{\uparrow}X(N,C)\right)$$

$$= \Pi(N) \int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty} P_n(N,x,C)\,dx$$

$$= \int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty} \frac{\Pi(N)C}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)} \exp\left(\frac{-x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}\right) dx$$

$$= \frac{\Pi(N)C}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)} \int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty} \frac{-\sigma_n^2(N)}{x} \exp\left(\frac{-x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}\right) d\,\frac{-x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}$$

$$= -\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}} \int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty} \frac{1}{x}\, d\exp\left(\frac{-x^2}{2\,\sigma_n^2(N)}\right)$$

$$=\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{x}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\Bigg|_{x={}^{\uparrow}X(N,C)}^{x=\infty}-\int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)d\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}\exp\left(\frac{-{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\right.$$

$$\left.+\sigma_n^2(N)\int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty}\frac{1}{x^3}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)d\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right\}$$

$$=\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}\exp\left(\frac{-{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\right.$$

$$\left.+\sigma_n^2(N)\int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty}\frac{1}{x^3}d\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\right\}$$

$$=\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}\exp\left(\frac{-{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{\sigma_n^2(N)}{x^3}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\Bigg|_{x={}^{\uparrow}X(N,C)}^{x=\infty}+3\int_{{}^{\uparrow}X(N,C)}^{\infty}\frac{\sigma_n^2(N)}{x^4}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)dx\right\}=1$$

得

$$1>\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}\exp\left(\frac{-{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\left(1-\frac{\sigma_n^2(N)}{{}^{\uparrow}X(N,C)^2}\right)$$

$$1<\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}\exp\left(\frac{-{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)$$

综合上两式得

$$^{1}1=\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}\exp\left(\frac{-{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)$$

即：

$$^{1}\exp\left(\frac{{}^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)=\frac{\Pi(N)C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{{}^{\uparrow}X(N,C)}$$

上式两边取对数得：

$$\frac{^{\uparrow}X(N,C)^2}{2\,\sigma_n^2(N)} =^{1} \ln\left(\frac{\Pi(N)\,C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{^{\uparrow}X(N,C)}\right)+\delta$$

$$^{\uparrow}X(N,C)=\sigma_n(N)\sqrt{2\left\{\ln\left(\frac{\Pi(N)\,C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{^{\uparrow}X(N,C)}\right)+\delta\right\}}$$

$$=^{1}\ \sigma_n(N)\sqrt{2\ln\left(\frac{\Pi(N)\,C\sigma_n(N)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n(N)\sqrt{2\ln(2\Pi(N))}}\right)}$$

$$=^{1}\ \sigma_n(N)\sqrt{2\ln\left(\frac{\Pi(N)\,C}{2\sqrt{\pi\ln(2\Pi(N))}}\right)}=^{1}\ \sqrt{2\ln N}\,\sigma_n(N)$$

$$=^{1}\ \sqrt{2\ln N}\,\frac{2\sqrt{2\pi}\ \ N}{4\Pi(N)}=^{1}\ \sqrt{2\ln N}\,\frac{2\sqrt{2\pi}\ \ln N}{4}=^{1}\ \sqrt{\pi\ln^3 N}$$

得$^{\uparrow}X(N,C)$的表达式，注意以上近似计算须在$1=\Pi(N)$条件下进行，证毕

2. 4.2　指数分布函数的边界

定理 7　素数定理记为$\pi(N)$、$\Pi(N)$，具有特征量x量时的素数定理记为$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$，指数分布函数记为$P_e(N,x)$、均方差记为$\sigma_e(N)$，即

$$P_e(N,x)=\frac{1}{\sigma_e(N)}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e(N)}\right) \qquad (71)$$

$\pi(N)$的近似重对数值域边界记为$^{\uparrow}\pi(N)$，　x的平均值边界，记为$^{\downarrow}X_e(N)$及$^{\uparrow}X_e(N)$，则

$$^{\uparrow}\pi(N)=^{1}\ \sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma_e(\pi(N)) \qquad (72)$$

$$^{\downarrow}X_e(N)=\frac{^{1}\sigma_e(\ \pi(N)\ )}{\Pi(N)} \qquad (73)$$

$$^{\uparrow}X_e(N)=\sigma_e(\pi(N))\ln\Pi(N) \qquad (74)$$

证明　　因是非对称边界，由“近似重对数边界”一节中的定理，即

$$^{\uparrow}\pi(f(N))=^{1}\ \sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma(f(N))=^{1}\ \sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma(N)$$

得

$$^{\uparrow}\pi(N) =^{1} \sqrt{2\ln\ln n}\,\sigma_e(N)$$

得$^{\uparrow}\pi(N)$ 的表达式，因$^{\downarrow}X_e(N)$ 是平均值下界，故：

$$0 \le \frac{^{\downarrow}X_e(N)}{\sigma_e(N)} = 1$$

由二维平均值理论下界定义及$P_e(N,x)$ 的表达式，得

$$1 = \Pi_e\left(N, x \le {}^{\downarrow}X_e(N)\right) = \int_0^{^{\downarrow}X_e(N)} \Pi(N)\, P_e(N,x)\, dx$$

$$= \int_0^{^{\downarrow}X(N)} \frac{\Pi(N)}{\sigma_e(N)} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_e(N)}\right) dx = -\Pi(N)\exp\left(\frac{-x}{\sigma_e(N)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x={}^{\downarrow}X_e(N)}$$

$$= \Pi(N)\left[1 - \exp\left(-\frac{^{\downarrow}X_e(N)}{\sigma_e(N)}\right)\right] =^{1} \Pi(N)\frac{^{\downarrow}X_e(N)}{\sigma_e(N)}$$

$$^{\downarrow}X_e(N) = \frac{^{1}\sigma_e(N)}{\Pi(N)}$$

得定理中$^{\downarrow}X_e(N)$ 的表达式

由二维平均值理论上界定义得

$$1 = \Pi_e\left(N, x \ge {}^{\uparrow}X_e(N)\right) = \int_{^{\uparrow}X_e(N)}^{\infty} \Pi(N)\, P_e(N,x)\, dx$$

$$= \int_{^{\uparrow}X_e(N)}^{\infty} \frac{\Pi(N)}{\sigma_e(N)} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_e(N)}\right) dx = -\Pi(N)\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e(N)}\right)\Bigg|_{x={}^{\uparrow}X_e(N)}^{x=\infty}$$

$$= \Pi(N)\exp\left(-\frac{^{\uparrow}X_e(N)}{\sigma_e(N)}\right)$$

上式两边取对数得

$$\ln\Pi(N) - \frac{^{\uparrow}X_e(N)}{\sigma_e(\pi(N))} = 0$$

整理上式得$^{\uparrow}X_e(N)$ 表达式

将素数定理$\pi(N)$ 以不同的概率分布函数为模型，进行近似处理时，将得到不同的边界$^{\uparrow}\pi(N)$ 值，如上面用正态分布和指数分布，得到的$^{\uparrow}\pi(N)$ 值阶相同，系数有点差别。如

果要获得更接近实际情况的$^{\uparrow}\pi(N)$值，采用分段计算$^{\uparrow}\pi(N)$值的办法，让每一段用最接近实际情况的概率分布函数为模型，进行计算

2.4.3 临界类型

定义 34 随机事件在边界附近所服从、或趋近的概率分布函数的类型，称为临界类型

若能确定边界的临界类型，就能由此计算它的平均值理论边界

由于边界附近发生的事件较少，实际边界围绕理论边界，将呈现出较大的波动性（周期性变化）和随机性，故也可以统计边界的概率分布特征等量

间距在 1184 内，统计相邻素数最大间距实际数据发现：理论值与实际值之比呈 U 形变化，由此推测：实际边界可能围绕理论边界呈波浪形分布，即周期性变化

临界类型的确定　1、理论分析；2、实际数据分析；　3、两者结合

2 .5　比值边界

2 .5.1 比值实际边界

比值实际边界，分为比值实际下界及比值实际上界

定义 35 事件$H(t)$出现素数的频率及概率，分别记为$\rho(H(t))$，$P(H(t))$，在指定概率空间$1\le t\le n$内，$H(t)$出现素数的实际个数及理论平均个数，分别记为$\pi(H(t))$，$\Pi(H(t))$，在$(1,n)$内总有一点$^{\downarrow}m$，使$\pi(H(^{\downarrow}m))\div\Pi(H(^{\downarrow}m))$的比值最小，并由此确定$^{\downarrow}m$的值，将$\pi(H(^{\downarrow}m))$，定义为事件$H(t)$在概率空间$(1,n)$内的比值实际下界，并表为

$$^{\downarrow}\pi(H(^{\downarrow}m))=Min\left\{\frac{\pi(H(^{\downarrow}m))}{\Pi(H(^{\downarrow}m))}\right\}\qquad(1\le{}^{\downarrow}m\le n)$$

同理，在概率空间$(1,n)$内至总有一点$^{\uparrow}m$，使$\pi(H(^{\uparrow}m))\div\Pi(H(^{\uparrow}m))$的比值最大，并由此确定$^{\uparrow}m$的值，将$\pi(H(^{\uparrow}m))$，定义为事件$H(t)$在区域$(1,n)$内的比值实际上界，并表为

$$^{\uparrow}\pi(H(^{\uparrow}m))=Max\left\{\frac{\pi(H(^{\uparrow}m))}{\Pi(H(^{\uparrow}m))}\right\}\qquad(1\le{}^{\uparrow}m\le n)$$

2.5.2 比值理论边界

比值理论边界，分为比值理论下界及比值理论上界

定义 36 事件 $H(t)$ 出现素数的频率及概率，分别记为 $\rho(H(t))$ ，$P(H(t))$ ，在指定概率空间 $t \le n$ 内，$H(t)$ 出现素数的理论最少个数及理论平均个数，分别记为 ${}^{\downarrow}\Pi(H(t))$ ，$\Pi(H(t))$ ，在 $(1,n)$ 内总有一点 ${}^{\downarrow}m$ ，使 ${}^{\downarrow}\Pi(H({}^{\downarrow}m)) \div \Pi(H({}^{\downarrow}m))$ 的比值最小，并由此确定 ${}^{\downarrow}m$ 的值，将 ${}^{\downarrow}\Pi(H({}^{\downarrow}m))$ ，定义为事件 $H(t)$ 在概率空间 $(1,n)$ 内的比值理论下界，并表为

$${}^{\downarrow}\Pi(H({}^{\downarrow}m)) = Min\left\{\frac{{}^{\downarrow}\Pi(H({}^{\downarrow}m))}{\Pi(H({}^{\downarrow}m))}\right\} \qquad (1 \le {}^{\downarrow}m \le n)$$

同理，在概率空间 $(1,n)$ 内至总有一点 ${}^{\uparrow}m$ ，使 $\pi(H(a,{}^{\uparrow}m)) \div \Pi(H(a,{}^{\uparrow}m))$ 的值最大，并由此确定 ${}^{\uparrow}m$ 的值，将 $\pi(H(a,{}^{\uparrow}m))$ ，定义为事件 $H(t)$ 在区域 $(1,n)$ 内的比值实际上界，并表为

$${}^{\uparrow}\Pi(H(a,{}^{\uparrow}m)) = Max\left\{\frac{{}^{\uparrow}\Pi(H(a,{}^{\uparrow}m))}{\Pi(H(a,{}^{\uparrow}m))}\right\} \qquad ({}^{\uparrow}m < n)$$

上面给出了一维概率空间比值边界的定义，依此类推，可给出多维概率空间比值边界的定义。但由此计算任意事件的比值理论边界仍有困难，由概率论目前的方法，计算得到的 ${}^{\downarrow}\Pi(H(t))$ 或 ${}^{\uparrow}\Pi(H(t))$ ，总是单调函数，若概率论能在这方面有所突破，能获得周期变化的 ${}^{\downarrow}\Pi(H(t))$ 或 ${}^{\uparrow}\Pi(H(t))$ 函数，才能完成比值理论边界。比值实际边界可由实际数据统计获得

用本章的方法，还可研究在等胜率的理想赌博问题中，两人赌博资金比的边界问题，即资金之比大于边界比值时，资金大的一方必赢；同理可计算购买彩票时，购买的资金大于边界值时，必中特等奖 500 万等，此略

2.6 最小边界原则

当可用多种方法获得不全相等的理论边界时，可用以下原则估值实际边界的分布上限：
选择最小理论边界，将此原则称为最小边界原则
在概率格点论中将使用此原则

总结：（1）、理论边界的获得一般需要充分大（足够大）条件，这是一个没有确切值的模糊条件，判断此条件满足与否，是看理论边界是否得到实际边界的支持。

（2）、在理论边界的计算中，无论是重对数值域边界，还是平均值定义域边界，使用的原理是寻找实际边界分布的对称曲线，即实际边界将几乎对称地分布在此原理严格计算出来的理论值的两边。但实际情况是：这本身就是一个近似的数学模型，并进行了近似计算，多数情况下作了放大的近似计算。“放大”的作用有两个：降低了准确性；增加了可靠性。

（3）、当获得的理论边界，与实际边界的平均值连线，几乎是两条相距较近的“平行线”时，两个值之差与它们某个值之比较小时，称此条件下的理论边界是相对边界；当理论边界不小于所有实际边界时，称此理论边界是绝对边界

本书仅讨论相对边界，当讨论边界的分布时，才能获得绝对边界。但根据相对边界，实际边界平均值的关系，及实际边界与相对边界的最大偏差比值：最大偏差除相对边界，来估值绝对边界。这里讲的边界分布是指实际边界与理论边界的比值分布，可将这些比值用近似的概率分布函数拟合，从而近似地得到边界的分布，及边界的边界——绝对边界

第三章　自然数中的素数问题

3.1　素数个数及大小

3.1.1 自然数素数个数均分计算法

定理 1　自然数 N 的素数频率、平均素数频率及素数概率，分别记为$\rho(N)$、$\overline{\rho}(N)$、$P(N)$。小于 N 的自然数中，素数的实际及理论个数，分别记为$\pi(N)$、$\Pi(N)$，自然数 N 附近相邻素数间距的实际值，实际平均值及理论值分别表为δ、$\overline{\delta}$、Δ，则

$$P(N)=\frac{{}_{p}^{1}1}{\ln N}=^{1}\overline{\rho}(N) \qquad (1)$$

$$\pi(N)=^{1}\Pi(N)=^{1}\int^{N}P(t)\,dt={}_{\pi}^{1}li(N) \qquad (2)$$

$$\Delta=^{1}\overline{\delta}=^{1}\ln x \qquad (1=x) \qquad (3)$$

其中 ${}_{P}^{1}1$ 可称为素数概率系数，${}_{\pi}^{1}$可称为素数定理系数，后面可计算它们的值

证明　令$(x,x+\delta)$及$(x,x+\Delta)$是两组对应的相邻素数的实际值及理论值，显然

$$1=\pi(x+\delta)-\pi(x) \qquad (\delta=x)$$

$$1=\Pi(x+\Delta)-\Pi(x)=^{1}\Pi'(x)\Delta=^{1}\mathrm{P}(x)\Delta \qquad (1=\Delta=x) \qquad (4)$$

因$x+\delta$是素数，大于$x+\delta$的自然数中，每隔$x+\delta$个整数，有且仅有一个整数被$x+\delta$整除，素数公理约定：素数几乎是平均分布的，故素数$x+\delta$使此处的平均素数率

$\overline{\rho}(x+\delta)$ 相对于 x 处的平均素数率 $\overline{\rho}(x)$，几乎减少了 $1/(x+\delta)$，即

$$\overline{\rho}(x+\delta)=\overline{\rho}(x)\left(1-\frac{1}{x+\delta}\right)=\overline{\rho}(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$P(x+\Delta)=P(x)\left(1-\frac{1}{x+\Delta}\right)=P(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{P(x+\Delta)-P(x)}{P(x)}=\frac{P'(x)\Delta}{P(x)}=\frac{P'(x)}{P^2(x)}=-\frac{1}{x}$$

近似求解上面微分方程得 (1)，(2)，由 (1)、(4)，得 (3)

3. 1.2 自然数素数个数精确计算法

引理 1 N 的阶乘可表为 $N!$ [6] P94，则

$$\begin{cases} N!=\sqrt{2\pi N}\,(N\div e)^N=\sqrt{2\pi N}\,N^N\div e^N \\ \ln N!=N(\ln N-1)+0.5\ln(2\pi N)+\pm\varepsilon \end{cases} \qquad (5)$$

证明　第一个公式两边取对数即可，并注意 1 的对数用一个足够小的量 $\pm\varepsilon$ 表示

引理 120 在 $N!$ 的标准分解式中，质因子 p $(p\le N)$ 的指数表为 $h(p)$，由已有理论可将 $N!$ 表为[10] P19：

$$N!=\prod_{p\le N}p^{h(p)}\qquad\left(h(p)=\sum_{r=1}^{\uparrow r(p)}\left[\frac{N}{p^r}\right]\right) \qquad (6)$$

式中，$\uparrow r(p)$ 是 p 的指数 r 能取的最大值，即 r 的上界

证明　略

引理 3

$$\ln N!=\sum_{p\le N}\sum_{r=1}^{\uparrow r(p)}\left[\frac{N}{p^r}\right]\ln p=\sum_{r=1}^{\uparrow r}\sum_{p\le\uparrow p(r)}\left[\frac{N}{p^r}\right]\ln p \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}&{}^{\downarrow}p(r)=2\\&{}^{\uparrow}\overline{p}(r)=N^{\frac{1}{r}}-{}^{1}0.25r\ln N={}^{1}N^{\frac{1}{r}}\quad(1\le r\le {}^{\uparrow}r)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$${}^{\uparrow}r(p)=\left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]\ ,\quad {}^{\uparrow}r={}^{\uparrow}r(2)=\left[\frac{\ln N}{\ln 2}\right]\quad(2\le p\le {}^{\uparrow}p)\tag{9}$$

$${}^{\uparrow}\overline{r}(p)=\frac{\ln N}{\ln p}-\frac{{}^{1}1}{2}\ ,\quad {}^{\uparrow}\overline{r}=\frac{\ln N}{\ln 2}-\frac{{}^{1}1}{2}\quad(2\le p\le {}^{\uparrow}p)\tag{10}$$

其中

1） ${}^{\downarrow}p(r)$ ，${}^{\uparrow}p(r)$ 表示求和符号 $\sum$ 中素数变量 p 的实际上下界，${}^{\uparrow}\overline{p}(r)$ 是 ${}^{\uparrow}p(r)$ 的平均值

2） ${}^{\downarrow}r(p)$ ，${}^{\uparrow}r(p)$ 表示求和符号 $\sum$ 中指数 r 的实际上下界，${}^{\uparrow}\overline{r}(p)$ 是 ${}^{\uparrow}r(p)$ 的平均值

证明　由上面引理 2 的 (6) 式两边取对数，可得 $\ln N!$ 的表达式 (7) ，下面计算几个边界表达式

因最小素数是 2，最小正整数是 1，则

$${}^{\downarrow}p(r)=2\,,\ {}^{\downarrow}r(p)=1$$

当 r 在定义域 $(1,{}^{\uparrow}r)$ 内取值时，得

$${}^{\uparrow}p^{r}(r)\le N<{}^{\uparrow}p_{+1}^{r}(r)\ ,\quad {}^{\uparrow}p(r)\le \sqrt[r]{N}<{}^{\uparrow}p_{+1}(r)\qquad(1\le r\le {}^{\uparrow}r)$$

上式中，${}^{\uparrow}p(r)$ 表示顺号排列的第 $\pi(\sqrt[r]{N})$ 个素数，${}^{\uparrow}p_{+1}(r)$ 是比 ${}^{\uparrow}p(r)$ 大的相邻素数，${}^{\uparrow}p(r)$ 到 ${}^{\uparrow}p_{+1}(r)$ 的平均间距记为 $\overline{\delta}$，则

$$\overline{\delta}=\overline{{}^{\uparrow}p_{+1}(r)-{}^{\uparrow}p(r)}={}^{\uparrow}\overline{p}_{+1}(r)-{}^{\uparrow}\overline{p}(r)$$

因 N 是随机取值的，故 $\sqrt[r]{N}$ 等几率地分布在相邻素数 $({}^{\uparrow}p(r),{}^{\uparrow}p_{+1}(r))$ 内，$\sqrt[r]{N}$ 的平均值趋近于相邻素数 $({}^{\uparrow}p(r),{}^{\uparrow}p_{+1}(r))$ 平均值 $({}^{\uparrow}\overline{p}(r),{}^{\uparrow}\overline{p}_{+1}(r))$ 的中间，

$\left({}^{\uparrow}\overline{p}(r), {}^{\uparrow}\overline{p}_{+1}(r) \right)$ 的平均间距表为$\overline{\delta}$，故

$$ {}^{\uparrow}\overline{p}(r) = \sqrt[r]{N} - {}^{1}0.5\overline{\delta} = \sqrt[r]{N} \ {}^{1}0.5\ln\sqrt[r]{N} = {}^{1}\sqrt[r]{N} \qquad \left(1 \le r \le {}^{\uparrow}r\right) $$

得表达式(8)

当N的因子p在定义域中任意取值时。p^r的指数r的上界${}^{\uparrow}r(p)$可表为

$$ p^{{}^{\uparrow}r(p)} \le N < p^{{}^{\uparrow}r(p)+1} $$

$$ {}^{\uparrow}r(p)\ln p \le \ln N < \left({}^{\uparrow}r(p)+1\right)\ln p \qquad \left(2 \le p \le {}^{\uparrow}p\right) $$

$$ {}^{\uparrow}r(p) \le \frac{\ln N}{\ln p} < {}^{\uparrow}r(p)+1 $$

$$ {}^{\uparrow}r(p) = \left[\frac{\ln N}{\ln p}\right] \qquad \left(2 \le p \le {}^{\uparrow}p\right) $$

$$ {}^{\uparrow}r = {}^{\uparrow}r(2) = \left[\frac{\ln N}{\ln 2}\right] $$

因$\frac{\ln N}{\ln p}$的值在任意两个整数之间是等几率随机分布的，$\frac{\ln N}{\ln p} - \left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]$的平均值趋近$\frac{1}{2}$，故${}^{\uparrow}r(p)$的平均值${}^{\uparrow}\overline{r}(p)$可表为

$$ {}^{\uparrow}\overline{r}(p) = \overline{\left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]} = \frac{\ln N}{\ln p} - {}^{1}\frac{1}{2} \qquad \left(2 \le p \le {}^{\uparrow}p\right) $$

$$ {}^{\uparrow}\overline{r} = {}^{\uparrow}\overline{r}(2) = \frac{\ln N}{\ln 2} - {}^{1}\frac{1}{2} $$

得(9)、(10)式

定理2　自然数N的素数率$P(N)$及素数系数${}^{1}_{P}1$表达如下

$$P(N)=\frac{{}^{1}_{P}1}{\ln N}=\frac{1}{\ln N}-\left(\sum_{J=2}^{6}\frac{1}{J}x^{\frac{1-J}{J}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-\frac{2}{6}x^{-\frac{5}{6}}\right)\frac{1}{\ln N}+O\left(\frac{1}{\ln N}x^{\frac{-6}{7}}\right) \quad (11)$$

证明　用待定系数 A_J 将 ${}^{1}_{P}1$ 等表达如下

$$P(N)=\frac{{}^{1}_{P}1}{\ln N}=\left(1-\sum_{J=2}^{\uparrow r}A_J x^{\frac{1-J}{J}}\right)\frac{1}{\ln N} \quad \left({}^{\uparrow}r=\left[\frac{\ln N}{\ln 2}\right]\right) \quad (12)$$

令

$$m(r)=\sum_{p\le^{\uparrow}p(r)}\left[\frac{N}{p^r}\right]\ln p={}^{1}\sum_{J=2}^{\sqrt[r]{N}}\left[\pi(J)-\pi(J-1)\right]\left[\frac{N}{J^r}\right]\ln J \quad (13)$$

用理论值代替上式对应的实际值，用积分代替求和，上限不变，下变成一个接近 2 的量 ${}^{\pm}2$，将此过程产生的所有的误差包括在待定系数 A_J 中，并将取整值 $\left[\frac{N}{J^r}\right]$ 用 $\frac{N}{J^r}-B$ 代替，因 $\frac{N}{J^r}-B-\left[\frac{N}{J^r}\right]$ 的最可几值是 0.5，显然 $B={}^{1}0.5$，得

$$m(r)={}^{1}1\sum_{J={}^{\pm}2}^{\uparrow\overline{p}(r)}\left[\Pi(J)-\Pi(J-1)\right]\left[\frac{N}{J^r}\right]\ln J$$

$$=\int_{{}^{\pm}2}^{\uparrow\overline{p}(r)}{}^{1}P(x)\left(\frac{N}{x^r}-B\right)\ln x\,dx$$

$$=\int_{{}^{\pm}2}^{\uparrow\overline{p}(r)}\left(1-\sum_{J=2}^{\uparrow r}A_J x^{\frac{1-J}{J}}\right)\frac{{}^{1}1}{\ln x}\left(\frac{N}{x^r}-B\right)\ln x\,dx$$

$$m(r)=\int_{{}^{1}2}^{\uparrow\overline{p}(r)}\left\{\frac{N}{x^r}-B-\sum_{J=2}^{\uparrow r}A_J\left(Nx^{\frac{1-J}{J}-r}-Bx^{\frac{1-J}{J}}\right)\right\}dx \quad (14)$$

$$m(1)=\left\{N\ln x-Bx-\sum_{J=2}^{\uparrow r}A_J\left(\frac{-J}{J-1}Nx^{\frac{1-J}{J}}-JBx^{\frac{1}{J}}\right)\right\}\Bigg|_{x={}^{\pm}2}^{x=\uparrow\overline{p}(1)={}^{1}N}$$

$$=\left\{N\ln x-Bx+\sum_{J=2}^{\uparrow r}A_J\left(\frac{-J}{J-1}Nx^{\frac{1-J}{J}}+JBx^{\frac{1}{J}}\right)\right\}\Bigg|_{x={}^{\pm}2}^{x=N}+O(\ln N)$$

$$=N\ln N-BN+\sum_{J=2}^{\uparrow r}JA_J\left(\frac{1}{J-1}+B\right)N^{\frac{1}{J}}-C_1 N+O\left(\ln N\right)$$

$$m(1)=N\ln N-\left(B+C_1\right)N+\sum_{J=2}^{\uparrow r}JA_J\left(\frac{1}{J-1}+B\right)N^{\frac{1}{J}}+O\left(\ln N\right) \qquad (15)$$

$$m(r>1)=\left\{\frac{-N}{\left(r-1\right)x^{r-1}}-Bx-\sum_{J=2}^{\uparrow r}A_J\left(\frac{JN}{1-Jr}x^{\frac{1}{J}-r}-JBx^{\frac{1}{J}}\right)\right\}\Bigg|_{x=^{\pm}2}^{x=^{\uparrow}\overline{p}\left(r\right)=^{1}N^{\frac{1}{r}}}$$

$$m(r>1)=-\left(\frac{1}{r-1}+B\right)N^{\frac{1}{r}}+\sum_{J=2}^{\uparrow r}JA_J\left(\frac{1}{Jr-1}+B\right)N^{\frac{1}{Jr}}$$

$$+\frac{N}{\left(r-1\right)\left(^{\pm}2\right)^{r-1}}-\sum_{J=2}^{\uparrow r}\frac{JA_J N\left(^{\pm}2\right)^{\frac{1}{J}-r}}{Jr-1}+O\left(\ln N\right)$$

$$m(r>1)=-\left(\frac{1}{r-1}+B\right)N^{\frac{1}{r}}+\sum_{J=2}^{\uparrow r}JA_J\left(\frac{1}{Jr-1}+B\right)N^{\frac{1}{Jr}}-C_r N+O\left(\ln N\right) \qquad (16)$$

$$m(2)=-\left(1+B\right)N^{\frac{1}{2}}+2A_2\left(\frac{1}{3}+B\right)N^{\frac{1}{4}}+3A_3\left(\frac{1}{5}+B\right)N^{\frac{1}{6}}-C_2 N+O\left(N^{\frac{1}{7}}\right)$$

$$m(2)=-C_2 N-\left(1+B\right)N^{\frac{1}{2}}+2A_2\left(\frac{1}{3}+B\right)N^{\frac{1}{4}}+3A_3\left(\frac{1}{5}+B\right)N^{\frac{1}{6}}+O\left(N^{\frac{1}{7}}\right)$$

$$m(r>2)=-\left(\frac{1}{r-1}+B\right)N^{\frac{1}{r}}+2A_2\left(\frac{1}{2r-1}+B\right)N^{\frac{1}{2r}}-C_r N+O\left(N^{\frac{1}{3r}}\right)$$

$$m(r>2)=-C_r N-\left(\frac{1}{r-1}+B\right)N^{\frac{1}{r}}+2A_2\left(\frac{1}{2r-1}+B\right)N^{\frac{1}{2r}}+O\left(N^{\frac{1}{3r}}\right)$$

$$\sum_{r=1}^{\uparrow r}m(r)=N\ln N-\left(B+C_1\right)N+\sum_{J=2}^{\uparrow r}JA_J\left(\frac{1}{J-1}+B\right)N^{\frac{1}{J}}+O\left(N^{\frac{1}{7}}\right)$$

$$-C_2 N-\left(1+B\right)N^{\frac{1}{2}}+2A_2\left(\frac{1}{3}+B\right)N^{\frac{1}{4}}+3A_3\left(\frac{1}{5}+B\right)N^{\frac{1}{6}}$$

$$-\sum_{r=1}^{\uparrow r} C_r N - \sum_{r=3}^{\uparrow r}\left(\frac{1}{r-1}+B\right)N^{\frac{1}{r}} + 2A_2\left(\frac{1}{5}+B\right)N^{\frac{1}{6}}$$

$$= N\ln N - \left(B+\sum_{r=1}^{\uparrow r} C_r\right)N + \sum_{J=2}^{\uparrow r} JA_J\left(\frac{1}{J-1}+B\right)N^{\frac{1}{J}} + 2A_2\left(\frac{1}{3}+B\right)N^{\frac{1}{4}}$$

$$-\sum_{r=2}^{\uparrow r}\left(\frac{1}{r-1}+B\right)N^{\frac{1}{r}} + \left(3A_3+2A_2\right)\left(\frac{1}{5}+B\right)N^{\frac{1}{6}} + O\left(N^{\frac{1}{7}}\right)$$

$$= N\ln N - \left(B+\sum_{r=1}^{\uparrow r} C_r\right)N + \sum_{J=2}^{\uparrow r}\left(JA_J-1\right)\left(\frac{1}{J-1}+B\right)N^{\frac{1}{J}}$$

$$+2A_2\left(\frac{1}{3}+B\right)N^{\frac{1}{4}} + \left(3A_3+2A_2\right)\left(\frac{1}{5}+B\right)N^{\frac{1}{6}} + O\left(N^{\frac{1}{7}}\right)$$

$$= \ln N! = N\left(\ln N-1\right) + 0.5\ln\left(2\pi N\right) +^{\pm}\varepsilon$$

比较上式得

$$JA_J-1=0 \quad , \quad A_J=\frac{1}{J} \qquad \left(J\neq 4,6\right) \tag{17}$$

$$\left(JA_J-1\right)\left(\frac{1}{J-1}+B\right)+2A_2\left(\frac{1}{3}+B\right)=0 \qquad \left(J=4\right) \tag{18}$$

$$\left(JA_J-1\right)\left(\frac{1}{J-1}+B\right)+\left(3A_3+2A_2\right)\left(\frac{1}{5}+B\right)=0 \qquad \left(J=6\right) \tag{19}$$

由 $A_2=0.5$ 、代入 A_4 方程得

$$\left(4A_4-1\right)\left(\frac{1}{4-1}+B\right)+2*0.5\left(\frac{1}{3}+B\right)=0$$

所以， $A_4=0$

$$\left(6A_6-1\right)\left(\frac{1}{5}+B\right)+2\left(\frac{1}{5}+B\right)=0$$

所以， $A_6=-\frac{1}{6}$

整理可得本定理的结论。

由此定理可计算更多的待定系数A_J，以使素数个数理论值更精确，此略

引理 4

$$\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\ln t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\ln x-1} \tag{20}$$

证明 后面的“熊氏积分”一章中，将介绍此引理的证明，此略

定理 3 小于 N 的素数理论个数及实际个数，分别记为$\Pi(N)$，$\pi(N)$，则

$$\Pi(N)=li(x)-\left[\sum_{J=2}^{6}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}-\frac{\sqrt[4]{x}}{\ln x-1}-\frac{2\sqrt[6]{x}}{\ln x-1}\right]+O\left(\frac{\sqrt[7]{x}}{\ln x}\right) \tag{21}$$

$$\Pi(N)=li(x)-\sum_{J=2}^{3}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}+O\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}\right)={}_{\Pi}^{1}li(x) \tag{22}$$

$$\pi(N)=li(x)-\delta\sum_{J=2}^{3}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}+O\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}\right)={}_{\pi}^{1}li(x) \tag{23}$$

其中 将${}_{\Pi}^{1}1$及${}_{\pi}^{1}1$称为素数定理系数

证明 由上面定理的结果(11)得

$$\Pi(N)=\int^{N}P(x)\,dx=\int^{N}\left\{\left[\left(1-\sum_{J=2}^{6}\frac{x^{\frac{1-J}{J}}}{J}-\frac{x^{-\frac{3}{4}}}{4}-\frac{2x^{-\frac{5}{6}}}{6}\right)\frac{1}{\ln x}+O\left(\frac{x^{-\frac{6}{7}}}{\ln x}\right)\right]\right\}dx$$

$$=li(x)-\left[\sum_{J=2}^{6}\frac{x^{\frac{1-J}{J}+1}}{J\left(\frac{1-J}{J}+1\right)\ln x-1}-\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{4\left(-\frac{3}{4}+1\right)\ln x-1}-\frac{2x^{-\frac{5}{6}+1}}{6\left(-\frac{5}{6}+1\right)\ln x-1}\right]+O\left(\frac{\sqrt[7]{x}}{\ln x}\right)$$

$$=li(x)-\sum_{J=2}^{6}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}+\frac{\sqrt[4]{x}+2\sqrt[6]{x}}{\ln x-1}+O\left(\frac{\sqrt[7]{x}}{\ln x}\right)$$

$$=li(x)-\sum_{J=2}^{3}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}+O\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}\right)$$

对上式整理得本定理结果

实际值$\pi(N)$ 与理论值$\Pi(N)$ 的数据比较如表 3.1，3.2 所示

表 3.1 素数定理数据表

n	$li(10^n)$	$\dfrac{\sum_{J=2}^{3}\sqrt[J]{10^n}}{\ln 10^n - 1}$	$\Pi(10^n)_0$
2	29.1	4.1	25.0
3	176.6	7.1	169.5
4	1245.1	14.8	1230.3
5	9628.8	34.5	9594.3
6	78 627	86	78 541
7	664 917	238	664 679
8	5 762 208	601	5 761 607
9	50 849 234	1654	50 847 580
10	455 055 614	4638	455 050 976
11	4 118 066 402	13 189	4 118 053 213
12	37 607 950 281	37 926	37 607 912 355
13	346 065 645 809	110 039	346 065 535 770
14	3 204 942 065 692	321 627	3 204 941 744 065
15	29 844 571 475 288	945 854	29 844 570 519 434
16	279 238 344 248 557	2 796 083	279 238 341 452 474
17	2 623 557 165 610 822	8 302 257	2 623 557 157 308 565
18	24 739 954 309 690 415	24 748 722	24 739 954 284 941 693
19	234 057 667 376 222 382	74 023 332	234 057 667 302 199 050
20	2 220 819 602 783 663 483	222 070 225	2 220 819 602 561 593 258
21	21 127 269 486 616 126 182	668 002 385	21 127 269 485 948 123 797
22	201 467 286 691 248 261 498	2 014 253 822	201 467 286 689 234 007 676

其中

$$\Pi(10^n)_0 = li(10^n) - \frac{1}{\ln 10^n - 1}\sum_{J=2}^{3}\sqrt[J]{10^n}$$

表 3.2

n	$\pi(10^n)$	$\delta(10^n)$	$1-\frac{1}{\pi}1$	$1-\pi(10^n)\div li(10^n)$

2	25	1.01	0.8e-4	0.14
3	168	1.21	0.9e-2	0.05
4	1 229	1.09	1.1e-3	1.3e-2
5	9 592	1.07	2.4e-4	3.8e-3
6	78 498	1.50	5.5e-4	1.6e-3
7	664 579	1.42	1.5e-4	5.1e-4
8	5 761 455	1.25	2.6e-5	1.3e-4
9	50 847 534	1.03	0.9e-6	3.3e-5
10	455 052 511	0.67	－3.4e-6	6.8e-6
11	4 118 054 813	0.88	－3.9e-7	3.9e-7
12	37 607 912 018	1.009	0.9e-8	0.9e-8
13	346 065 536 839	0.990	－3.1e-9	3.2e-7
14	3 204 941 750 802	0.979	－2.1e-9	9.8e-8
15	29 844 570 422 669	1.113	3.2e-9	3.2e-8
16	279 238 341 033 925	1.150	1.5e-9	1.2e-8
17	2 623 557 157 654 233	0.958	－1.3e-10	3.0e-9
18	24 739 954 287 740 860	0.887	－1.1e-10	8.9e-10
19	234 057 667 276 344 607	1.349	1.1e-10	4.3e-10
20	2 220 819 602 560 918 840	1.003	3.0e-13	1.0e-10
21	21 127 269 486 018 731 928	0.894	－3.3e-12	2.8e-11
22	201 467 286 689 315 906 290	0.959	－4.1e-13	9.6e-12

（发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?page=2&Topic_ID=1817&forum_id=9）

其中

$$\pi\left(10^{n}\right)=li\left(10^{n}\right)-\delta\left(10^{n}\right)\sum_{K=2}^{3}10^{\frac{n}{K}}\frac{1}{n\ln 10}$$

$$\delta\left(10^{n}\right)=\left[li\left(10^{n}\right)-\pi\left(10^{n}\right)\right]\div\left[\frac{1}{n\ln 10}\sum_{K=2}^{3}10^{\frac{n}{K}}\right]$$

$$1-{}^{1}_{\pi}1=1-\frac{\pi(10^{n})}{\prod(10^{n})}$$

表中“$1-{}^{1}_{\pi}1$”及“$1-\pi\left(10^{n}\right)\div li\left(10^{n}\right)$”这两栏 e 及后的值，表示乘 10 为底的指数，如最后一个值 9.6e-12，表示 $9.6*10^{-12}$

上面表中的数据显示：N 值越大，$\frac{1}{\pi}1$值越接近 1，且比较“均匀对称”地分布在 1 的附近，支持它的理论值$\frac{1}{\Pi}1$是渐近函数的要求。$1-\frac{1}{\pi}1$的绝对值比$1-\pi(10^n)\div li(10^n)$绝对值小得多，且基本上以零附近为中心分布

因 $\delta(10^n)$ 的实际平均值 $\bar{\delta}=1.072$，它支持素数定理中，δ 的理论值，等于 1 的要求，其实际偏差满足理论（计算的）偏差的要求，它由实际值围绕理论值的正常波动，及近似计算造成的系统误差组成

3. 1.3 素数个数均方差及边界的估值

定理 4 不大于 x 的自然数中，素数个数 $\pi(x)$ 偏离其理论值 $\Pi(x)$ 的均方差及重对数边界，其估值记为$\sigma\ (\pi(x))$、$^{\uparrow}\pi(x)$，则

$$\sigma\ (\pi(x)) =^{1} \sqrt{\pi(x)} \tag{24}$$

$$^{\uparrow}\pi(x) =^{1} \sigma(\pi(x))\sqrt{\ln\ln x} =^{1} \sqrt{2\pi(x)\ln\ln x} \tag{25}$$

$$\pi(x) = \Pi(x) \pm\ \ \pi(x) = \Pi(x) \pm^{1} \sqrt{2\pi(x)\ln\ln x} \tag{26}$$

证明 自然数 i 是否为素数，看成是一个记为ξ_i的随机事件，在$i \le x$时，ξ_i中出现素数的个数——素数定理可表为

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = \sum_{i=1}^{x} \xi_i \tag{27}$$

在上面随机事件ξ_i求和中，可将ξ_i近似成：素数概率为其定义域$(1,x)$内 平均素数概率，记为 $\overline{P}(1,x)$、试验次数为 x、相互独立、等几率贝努里试验模型，进行近似求解，则

$$\overline{P}(1,x) = \frac{\Pi(x)}{x} = \frac{^{1}\pi(x)}{x} = \frac{^{1}1}{\ln x} \tag{28}$$

这个模型服从二项分布[4] P77， 平均素数个数记为$\overline{\pi}(x)$，在概率论中又称它为数学

期望[4] P165，并注意它与均方差$\sigma(\pi(x))$的关系[4] P174 得

$$\overline{\pi}(x)=\overline{P}(1,x)\,x=^{1}\pi(x)=^{1}\sigma^{2}(\pi(x))$$

$$\sigma(\pi(x))=^{1}\sqrt{\pi(x)}$$

实际情况是，在自然数集合中，各元素（自然数）出现素数这一问题，并不是完全相互独立的，有许多组合不可能出现，如全部是素数或合数(两者均只有一个组合)。这些远离均值的组合出现的数量减少，致使均方差变小，在概率模型中，这种情况的组合数也不多，是高阶小量，不符合概率模型的实际情况就更少，可以忽略且不影响精确。实际数据支持这一概率模型下得出的理论结果，可得素数定理均方差$\sigma(\pi(x))$的表达式。${}^{\uparrow}\pi(x)$及$\pi(x)$的表达式直接套用边界一章的公式即可

3. 1.4 素数个数均方差及边界的精确计算

定理 5 不大于 x 的自然数中，素数个数$\pi(x)$偏离其理论值$\Pi(x)$的均方差及重对数边界的估值，分别记为$\sigma(\pi(x))$、${}^{\uparrow}\pi(x)$，则

$$\sigma(\pi(x))=\sqrt{\Pi(x)} \tag{29}$$

$${}^{\uparrow}\pi(x)=\sqrt{2\Pi(x)\ln\ln x} \tag{30}$$

$$\pi(x)=\Pi(x)\pm{}^{\uparrow}\pi(x)=\Pi(x)\pm\sqrt{2\Pi(x)\ln\ln x} \tag{31}$$

证明　将$(1,x)$内的自然数分成 k 个区间$(\Delta_1,\Delta_2,\cdots\cdots,\Delta_j,\cdots\cdots,\Delta_k)$，第 j 区间的素数定理表为$\pi_j(x)$，则

$$\pi_j(x)=\pi(\Delta_j)-\pi(\Delta_{j-1}) \qquad (\Delta_{j-1}<\Delta_j,1\le j\le k,\ \Delta_k=x) \tag{32}$$

由上式及前面定理得

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{x}\xi_i=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1+\Delta_{j-1}}^{\Delta_j}\xi_i=\sum_{j=1}^{k}\pi_j(x)=\sum_{j=1}^{k}\left[\pi(\Delta_j)-\pi(\Delta_{j-1})\right]$$

$$(\Delta_{j-1}<\Delta_j,1\le j\le k,\ \Delta_k=x) \tag{33}$$

在上面随机事件ξ_i求和中，可将ξ_i近似成：素数概率为其每个区间$\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)$内 的平均素数概率，记为$\overline{p}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)$， $\overline{P}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)$， 且试验次数为$\Delta_j-\Delta_{j-1}+1$、相互独立、等几率贝努里试验模型，进行近似求解，则有

$$\overline{P}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)=\frac{\Pi\left(\Delta_j\right)-\Pi\left(\Delta_{j-1}\right)}{\Delta_j-\Delta_{j-1}}=^1\overline{p}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right) \tag{34}$$

这个模型服从二项分布[4] P77， 平均素数个数记为$\overline{\pi}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)$，在概率论中又称它为数学期望[4] P165，并注意它与均方差$\sigma\left(\overline{\pi}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)\right)$的关系[4] P174 得

$$\Pi\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)=\overline{P}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)\left(\Delta_j-\Delta_{j-1}\right)=\Pi\left(\Delta_j\right)-\Pi\left(\Delta_{j-1}\right)=^1\sigma^2\left(\overline{\pi}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)\right)$$

$$\sigma\left(\overline{\pi}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)\right)=\sqrt{\Pi\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)}=^1\sqrt{\Pi\left(\Delta_j\right)-\Pi\left(\Delta_{j-1}\right)} \tag{35}$$

将(35)此式代入下式

$$\sigma^2\left(\pi(x)\right)=\sigma^2\left(\overline{\pi}\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\right)+\sigma^2\left(\overline{\pi}\left(\Delta_2,\Delta_3\right)\right)+\cdots\cdots+\sigma^2\left(\overline{\pi}\left(\Delta_{k-1},\Delta_k\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sigma^2\left(\overline{\pi}\left(\Delta_{j-1},\Delta_j\right)\right)$$

得

$$\sigma^2\left(\pi(x)\right)=\sum_{j=1}^{k}\left[\Pi\left(\Delta_j\right)-\Pi\left(\Delta_{j-1}\right)\right]=\Pi(x)$$

整理上式得$\sigma\left(\pi(x)\right)$值，由边界一章中的定理得$^{\uparrow}\pi(x)$及$\pi(x)$表达式

3. 1.5 素数大小的均方差及边界的估值

定理 6 设第 i 个素数的实际值及理论值，分别记为 p_i ，P_i ，因理论值 P_i 是实际值 p_i 的最可机值，实际值 p_i 将以理论值 P_i 为对称中心，几乎均匀地分布在它的两侧，两者的差值记为 ζ_i ，即

$$\zeta_i = P_i - p_i \tag{36}$$

可将 ζ_i 近似看成平均值为零，对称分布的随机变量， $i \le \pi(N)$ 时， p_i 与 ζ_i 的均方差及重对数边界相同，记为 $\sigma(p_i)$ 、$\sigma(\zeta_i)$ 、$\uparrow p_i$ 、$\uparrow \zeta_i$ ，则

$$\sigma(p_i) = \sigma(\xi_i) \approx \sqrt{p_i \ln p_i} \tag{37}$$

$$\uparrow p_i = \uparrow \zeta_i \approx \sqrt{2 p_i \ln p_i \ln\ln p_i} \tag{38}$$

$$p_i = P_i \pm \uparrow p_i = P_i \pm \sqrt{2 p_i \ln p_i \ln\ln p_i} \tag{39}$$

证明 因 P_i 、 $\Pi(P_i)$ 均是无波动偏差并连续平滑变化的理论值，则

$$\sigma(P_i) = 0 \quad , \quad \sigma(\Pi(P_i)) = 0$$

$$i = \Pi(P_i) \approx \frac{P_i}{\ln P_i} \quad , \qquad i = \pi(p_i) \approx \frac{p_i}{\ln p_i}$$

$$\Pi(P_i) - \pi(p_i) \approx \frac{P_i}{\ln P_i} - \frac{p_i}{\ln p_i} \approx \frac{P_i - p_i}{\ln P_i}$$

$$\sigma(\Pi(P_i) - \pi(p_i)) = \sigma(\pi(p_i)) \approx \sigma\left(\frac{P_i - p_i}{\ln P_i}\right)$$

$$\approx \sigma\left(\frac{\zeta_i}{\ln P_i}\right) \approx \frac{\sigma(\zeta_i)}{\ln P_i} \approx \frac{\sigma(p_i)}{\ln P_i}$$

$$\sigma(p_i) = \sigma(\zeta_i) \approx \sigma(\pi(p_i)) \ln p_i$$

将(24)代入上式得

$$\sigma\left(p_i\right) =^{1} \sqrt{\pi\left(p_i\right)}\ln p_i =^{1} \sqrt{\frac{p_i}{\ln p_i}\ln p_i} =^{1} \sqrt{p_i \ln p_i}$$

得定理中$\sigma\left(p_i\right)$表达式，同理得

$$^{\uparrow}p_i =^{\uparrow}\zeta_i =^{1} \sigma\left(p_i\right)\sqrt{2\ln\ln p_i} =^{1} \sqrt{2p_i \ln p_i \ln\ln p_i}$$

得定理中$\sigma\left(p_i\right)$、$\sigma\left(\zeta_i\right)$、$^{\uparrow}p_i$、$^{\uparrow}\zeta_i$ 的表达式，证毕

3. 1.6 素数大小的均方差及边界的精确计算

定理 7 设第 i 个素数的实际值及理论值，分别记为 p_i ， P_i ，因理论值 P_i 是实际值 p_i 的最可机值，实际值 p_i 将以理论值 P_i 为对称中心，几乎均匀地分布在它的两侧，两者的差值记为ζ_i ，即

$$\zeta_i = P_i - p_i \tag{40}$$

可将ζ_i 近似看成平均值为零，对称分布的随机变量，当$i \le \pi\left(N\right)$时， p_i 与ζ_i 的均方差及重对数边界相同，记为$\sigma\left(p_i\right)$、$\sigma\left(\zeta_i\right)$、$^{\uparrow}B\left(p_i\right)$、$^{\uparrow}B\left(\zeta_i\right)$，则

$$\sigma\left(p_i\right) = \sigma\left(\xi_i\right) = \sqrt{p_i \ln p_i} \tag{41}$$

$$^{\uparrow}p_i =^{\uparrow}\zeta_i = \sqrt{2p_i \ln p_i \ln\ln p_i} \tag{42}$$

$$p_i = P_i \pm \sqrt{2p_i \ln p_i \ln\ln p_i} \tag{43}$$

证明　证明过程与“素数个数均方差及边界的精确计算”定理相似，此略，毕

3. 1.7 素数个数均方差及边界的精确计算

引理 4 （a，b）内均匀分布的均方差记为$\sigma\left(a,b\right)$，则[4] P174

$$\sigma^2(a,b)=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{44}$$

证明　依定义，有

$$\sigma^2(a,b)=\int_a^b \frac{t^2dt}{b-a}-\left(\int_a^b \frac{tdt}{b-a}\right)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

整理上式得引理中$\sigma^2(a,b)$的表达式

引理 5　素数定理$\pi(x)$的均方差$\sigma(\pi(x))$及重对数边界$^{\uparrow}\pi(x)$，分别等价于素数大小波动值ξ_i求和$\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i$的均方差$\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i\right)$，及重对数边界$^{\uparrow}\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i$，则

$$\sigma(\pi(x))=\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i\right) \tag{45}$$

$$^{\uparrow}\pi(x)={}^{\uparrow}\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i \tag{46}$$

证明

$$\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i=\sum_{i=1}^{\pi(x)}(P_i-p_i)=\sum_{i=1}^{\pi(x)}P_i-\sum_{i=1}^{\pi(x)}p_i=\Pi(x)-\pi(x)$$

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i\right)=\sigma(\Pi(x)-\pi(x))=\sigma(\pi(x))$$

$$^{\uparrow}\sum_{i=1}^{\pi(x)}\xi_i={}^{\uparrow}(\Pi(x)-\pi(x))={}^{\uparrow}\pi(x)$$

因$\Pi(x)$是不大于 x 的自然数中，素数个数无波动的理论平均值，故$\sigma^2(\Pi(x))=0$，证毕

定理 8　素数定理$\pi(x)$的均方差$\sigma(\pi(x))$及重对数边界$^{\uparrow}_{B}\pi(x)$，可表达如下

$$\sigma\left(\pi\left(x\right)\right)=^{1}\ \frac{^{\pm}3\sqrt{3N}}{2\ln N} \tag{47}$$

$$^{\uparrow}\pi\left(x\right)=^{1}\ \frac{^{\pm}3\sqrt{6N\ln\ln N}}{2\ln N} \tag{48}$$

证明　将“自然数素数个数精确计算法”一节中，定理推导中的 B 值，改写成以下含随机变量ψ_p的形式，

$$m(r)=\sum_{p\le\sqrt[r]{N}}\left[\frac{N}{p^r}\right]\ln p=\sum_{p\le\sqrt[r]{N}}\left(\psi_p+\frac{N}{p^r}-\frac{1}{2}\right)\ln p=\sum_{i=1}^{\pi\left(\sqrt[r]{N}\right)}\left(\psi_i+\frac{N}{p_i^r}-\frac{1}{2}\right)\ln p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi\left(\sqrt[r]{N}\right)}\left(\psi_i+\frac{N}{\left(P_i-\xi_i\right)^r}-\frac{1}{2}\right)\ln\left(P_i-\xi_i\right)$$

$$=^{1}\sum_{i=1}^{\pi\left(\sqrt[r]{N}\right)}\left[\psi_i+\frac{N}{P_i^r}\left(1+\frac{\xi_i}{P_i}\right)^{-r}-\frac{1}{2}\right]\left[\ln P_i+\ln\left(1-\frac{\xi_i}{P_i}\right)\right]$$

$$m(r)=^{1}\sum_{i=1}^{\pi\left(\sqrt[r]{N}\right)}\left(\psi_i-\frac{Nr\xi_i}{P_i^{r+1}}+\frac{N}{P_i^r}-\frac{1}{2}\right)\left(\ln P_i-\frac{\xi_i}{P_i}\right) \tag{49}$$

因 N 是任意取值，$\frac{N}{p^r}$ 的余数的值等于零、$\frac{1}{p^r}$、$\frac{2}{p^r}$、……、$\frac{p^r-1}{p^r}$，共 p^r 种可能，且每种可能等几率出现，当 N 的值较大时，可认为 ψ_p 的值几乎均匀地分布在(-0.5,0.5)内，由引理 4，可将ψ_p的均方差$\sigma\left(\psi_p\right)$表达式如下

$$\sigma^2\left(\psi_p\right)=\sigma^2\left(-0.5,0.5\right)=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}\Bigg|_{a=-0.5}^{b=0.5}=\frac{1}{12} \tag{50}$$

对$\left(49\right)$两边计算均方差，忽略高阶小项，并注意$m(r)$的均方差为零，得

$$0=\sum_{r=1}^{r}\sigma^2\left(m(r)\right)=^{1}\ \sigma^2\left(m(1)\right)$$

$$=^{1}\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left(\psi_{i}-\frac{N\xi_{i}}{P_{i}^{2}}+\frac{N}{P_{i}}-\frac{1}{2}\right)\left(\ln P_{i}-\frac{\xi_{i}}{P_{i}}\right)\right)$$

$$=^{1}\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left[\left(\psi_{i}-\frac{N\xi_{i}}{P_{i}^{2}}\right)\ln P_{i}-\left(\frac{N}{P_{i}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\xi_{i}}{P_{i}}\right]\right)$$

$$=^{1}\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left[\psi_{i}\ln P_{i}-\left(\frac{N}{P_{i}}+\frac{N\ln P_{i}}{P_{i}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\xi_{i}}{P_{i}}\right]\right)$$

$$=^{1}\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\psi_{i}\ln P_{i}\right)-\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left(\frac{N}{P_{i}}+\frac{N\ln P_{i}}{P_{i}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\xi_{i}}{P_{i}}\right)$$

$$=^{1}\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\psi_{i}\right)\sum_{i=1}^{\pi(N)}\ln^{2}P_{i}-\sigma^{2}\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\xi_{i}\right)\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left(\frac{N}{P_{i}}+\frac{N\ln P_{i}}{P_{i}}-\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1}{P_{i}^{2}}$$

由(45)、(50)代入上式得

$$0=^{1}\sigma^{2}\left(\pi(N)\sigma\left(\psi_{p}\right)\right)\sum_{p\le N}\ln^{2}p-\sigma^{2}\left(\pi(x)\right)\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left(\frac{N}{P_{i}}+\frac{N\ln P_{i}}{P_{i}}-\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1}{P_{i}^{2}}$$

$$=^{1}\pi^{2}(N)\sigma^{2}\left(\psi_{p}\right)\int_{\pm 3}^{N}\ln^{2}t\,P(t)\,dt-\sigma^{2}\left(\pi(x)\right)\int_{\pm 3}^{N}\left(\frac{N}{t}+\frac{N\ln t}{t}-\frac{1}{2}\right)^{2}P(t)\frac{dt}{t^{2}}$$

$$=^{1}\pi^{2}(N)\sigma^{2}\left(\psi_{p}\right)\int_{\pm 3}^{N}\ln t\,dt-\sigma^{2}\left(\pi(x)\right)\int_{\pm 3}^{N}\left(\frac{N}{t}+\frac{N\ln t}{t}-\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{dt}{t^{2}\ln t}$$

$$=^{1}\pi^{2}(N)\sigma^{2}\left(\psi_{p}\right)(\ln N-1)N-\sigma^{2}\left(\pi(x)\right)\int_{\pm 3}^{N}\left(\frac{N}{t}+\frac{N\ln t}{t}-\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{dt}{t^{2}\ln t}$$

因

$$\int_{\pm 3}^{N}\left(\frac{N}{t}+\frac{N\ln t}{t}-\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{dt}{t^{2}\ln t}=^{1}\int_{\pm 3}^{N}\left(\frac{N}{t}+\frac{N\ln t}{t}\right)^{2}\frac{dt}{t^{2}\ln t}=^{1}\int_{\pm 3}^{N}(1+\ln t)^{2}\frac{N^{2}dt}{t^{4}\ln t}$$

$$=^{1}\frac{N^{2}(1+\ln N)^{2}}{\ln N}\int_{\pm 3}^{N}\frac{dt}{t^{4}}=^{\pm}\frac{N^{2}(1+\ln N)^{2}}{3^{4}\ln N}$$

代入上式，得

$$0 =^{1} \pi^2(N)\sigma^2(\psi_i)N(\ln N-1)-\sigma^2(\pi(x))^{\pm}\frac{N^2(1+\ln N)^2}{3^4\ln N}$$

$$=^{1} \frac{N^2}{12\ln^2 N}N(\ln N-1)-\sigma^2(\pi(x))^{\pm}\frac{N^2(1+\ln N)^2}{3^4\ln N}$$

$$=^{1} \frac{N(\ln N-1)}{4\ln N}-\sigma^2(\pi(x))^{\pm}\frac{(1+\ln N)^2}{3^3}$$

$$\sigma(\pi(x)) =^{1} \sqrt{\frac{^{\pm}3^3N(\ln N-1)}{4(1+\ln N)^2\ln N}}$$

整理上式得定理中$\sigma(\pi(x))$表达式，由

$$^{\uparrow}\pi(x) =^{1} \sigma(\pi(x))\sqrt{2\ln\ln N}$$

得定理中$^{\uparrow}\pi(x)$的表达式

3. 1.8 精确素数定理

定理 9 精确素数定理 可表达如下

$$\prod(x)=li(x)-\sum_{J=2}^{3}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}+O\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}\right)=\left(1-\frac{^{1}1}{\sqrt{x}}\right)li\,x \qquad (51)$$

$$\pi(x)=\prod(x)\pm\ \pi(x)=li(x)-\sum_{J=2}^{3}\frac{\sqrt[J]{x}}{\ln x-1}+O\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}\right)\pm{}^{\le}\frac{^{\pm}3\sqrt{6N\ln\ln N}}{2\ln N} \qquad (52)$$

证明 由“自然数素数个数精确计算法”、“素数个数均方差及边界的精确计算”两节的结果可得本定理，它使目前仍没证明的素数定理

$$\pi(x):\ li\,x$$

得到了更好的描述（发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?page=3&Topic_ID=1817&forum_id=9）

3. 1.7 黎曼猜测为真

定理 131　黎曼猜测及广义黎曼猜测为真

证明　　黎曼猜测为真与下面关系[2]P45

$$\pi(x)-li\,x=O\left(\sqrt{x}\ln x\right) \tag{53}$$

等价，由上面的“精确素数定理”，显然能使该关系成立

广义黎曼猜测为真与下面关系[2]P53

$$\pi(x,k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}li\,x+O\left(\sqrt{x}\ln x\right) \tag{54}$$

等价，由素数公理及精确素数定理，同样可证该关系(42)成立，其中　$\pi(x,k,l)$ 表示 $t\le x$时，等差数列$tk+l$ 中的素数个数

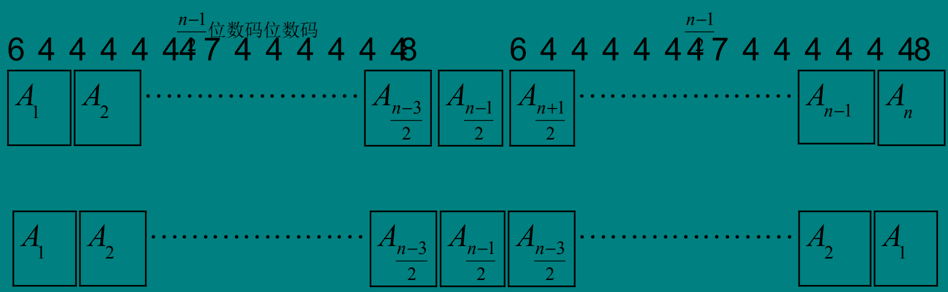
3.2　自然数中的回文素数问题

3.2.1　回文素数的个数

在下面回文数的叙述中，表达回文数的位数的字符 n 、N ，一般均是奇数；表达 S 进制时的 S，则是偶数

定义 1　当 $1 \le A_1$， $A_i = A_{n+1-i}$ 且 n 是奇数，将

$$H(S,n) = A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{cases} H_1(S,n) = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} A_i\left(S^i + S^{n-1-i}\right) + A_{(n+1)/2} S^{\frac{n-1}{2}} \\ H_2(S,n-1) = \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} A_i\left(S^i + S^{n-2-i}\right) \end{cases} \quad (55)$$



$A_1 = A_n$ ， $A_2 = A_{n-1}, \cdots\cdots$ ， $A_i = A_{n+1-i}$

回文数示意图

中的 $H(S,n)$ ，称为 S 进制回文数，当 $S = 10$ 时，得到十进制回文数的定义，一般以省略了 S 的 $H(n)$ 等形式表达。其中：将奇数的 $H(n)$ 称为十进制奇位奇数回文数，简称奇位奇回文数；将奇数的 $H(n-1)$ 简称为偶位奇数回文数；当 $H(n)$ 、$H(n-1)$ 是素数时，$H(n)$ 简称奇位回文素数，$H(n-1)$ 简称偶位回文素数

定理 11　11 是任何进制的偶位回文数 $H(S,2k)$ 的一个因子，故 11 至多是任何进制偶位回文数中的唯一素数。在十进制中它的值表达为 $S+1$，故涉及回文数的素数问题，均是非等几问题。

证明　略

回文素数，可分为一般回文素数，及特定回文素数。后者要求回文素数，满足某特定条件，如梅森素数，就是特定回文素数：它是首尾数码为 1、其余数码为零的 2 进制回文素数

下面叙述的回文素数对，也是特定回文素数

定理 12 令n、N均是不小于 3 的奇数， 奇数n及偶数$n-1$位回文数记为$H(n)$、$H(n-1)$，它们出现素数的概率、实际个数、理论个数等分别记为$P(H(n))$、$P(H(n-1))$、$m(H(n))$、$M(H(n))$、$m(H(n-1))$、$M(H(n-1))$、$m(H(n,n-1))$、$M(H(n,n-1))$，令

$$m(H(n,n-1)) = m(H(n)) + m(H(n-1)) = m(H(n))$$
$$(n = 2k+1 \geq 5)$$

$$M(H(n,n-1)) = M(H(n)) + M(H(n-1))$$

在$n \leq N$时， $m(H(n))$及$M(H(n))$之和表为$\pi(H(N))$、$\Pi(H(N))$

$$\pi(H(N)) = \sum_{n=1}^{N} m(H(n))$$

$$\Pi(H(N)) = \sum_{n=1}^{N} M(H(n))$$

则

$$M(H(n)) =^{\pm} C\frac{li(10^{n}) - li(10^{n-1})}{10^{(n-1)/2}} =^{\pm} C\left(\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n} - 1} - \frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1} - 1}\right) \quad (56)$$

$$M(H(n-1)) =^{\pm} C\frac{li(10^{n-1}) - li(10^{n-2})}{10^{\frac{n-1}{2}}} =^{\pm} C\left(\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1} - 1} - \frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-2} - 1}\right) \quad (57)$$

$$M(H(2)) =^{\pm} C\left(\frac{10}{\ln 100 - 1} - \frac{1}{\ln 10 - 1}\right) =^{\pm} C1.40 \quad (58)$$

$$m(H(n)) =^{1} M(H(n,n-1)) =^{\pm} C\left(\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n} - 1} - \frac{10^{\frac{n-3}{2}}}{\ln 10^{n-2} - 1}\right) \quad (59)$$

$$\Pi(H(1)) = 0 \quad (60)$$

$$\pi(H(N)) = \pi(H(N-2)) + m(H(N)) =^{1} \Pi(H(N)) \quad (61)$$

$$\Pi(H(N)) = \Pi(H(N-2)) + M(H(N,N-1)) \quad (62)$$

证明　因 11 是唯一的偶回文素数，统计回文数 $H(n)$ 的实际素数个数 $\pi(H(n))$ 时，仅统计奇回文素数，即

$$\pi(H(N))=\sum_{n=1}^{N}m(H(n))=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}m(H(2k+1))+1=\pi(H(N-2))+m(H(N))$$

得定理中 $\pi(H(N))$ 的表达式。但统计偶位 $n-1$ 位回文数 $H(n-1)$ 的理论素数个数 $M(H(n-1))$ 时，因素数公理的约束，对实际上并不存在素数的偶位回文数中的素数概率 $P(H(n-1))$ 仍要统计 ，显然

$$n=2k+1$$

$$1\le A_1=A_n\le 9$$

$$0\le A_i=A_{2k+2-i}\le 9 \qquad (2\le i\le k)$$

1)　奇位回文数 $H(n)$ 中的素数问题

设奇位回文数 $H(n)$ 的取值个数记为 $u(H(n))$，因 $H(n)$ 的最小值是 10^{n-1}，最大值是 10^n-1， 计算奇位回文数 $H(n)$ 的取值个数 $u(H(n))$ 的计算方法为：首尾两位数的数码只能取 1 到 9，有 9 种取值个数；中间的 $n-2$ 位数中，有 $\frac{n-1}{2}$ 位数的数码可自由取值，每位数的数码可以取 0 到 9，产生 $10^{\frac{n-1}{2}}$ 种取值个数，两者组合得 $u(H(n))$，即

$$u(H(n))=9*10^{\frac{n-1}{2}}=9*10^k \qquad (n=2k+1)$$

显然：回文数 $H(n)$ 的 $9*10^{\frac{n-1}{2}}$ 个取值个数，比较平均地按照自然数的大小，分布在 $H(n)$ 的最小值与最大值 $(10^{n-1},10^n-1)$ 之间，回文数 $H(n)$ 在该区间的平均素数率 $\overline{P}(H(n))$，几乎正比于 $(10^{n-1},10^n-1)$ 内，函自素数率 $\overset{\circ}{P}(H(n))$ 的平均值 $\overset{\circ}{\overline{P}}(H(n))$，暂作非等几事件处理，素率系数记为 ${}^{\pm}C$，则

$$\overline{P}(H(n))={}^{\pm}C\overset{\circ}{\overline{P}}(H(n))={}^{\pm}C\frac{\Pi(10^n-1)-\Pi(10^{n-1})}{10^n-1-10^{n-1}}$$

$$\overline{P}(H(n))={}^{\pm}C\frac{li(10^n)-li(10^{n-1})}{9*10^{n-1}}$$

$$M\left(H\left(n\right)\right)=u\left(H\left(n\right)\right)\overline{P}\left(H\left(n\right)\right)$$

$$M\left(H\left(n\right)\right)\overset{\pm}{=}C9*10^{\frac{n-1}{2}}\frac{li\left(10^{n}\right)-li\left(10^{n-1}\right)}{9*10^{n-1}}\overset{\pm}{=}C\frac{li\left(10^{n}\right)-li\left(10^{n-1}\right)}{10^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$M\left(H\left(n\right)\right)=\frac{^{\pm}C}{10^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{10^{n}}{\ln 10^{n}-1}-\frac{10^{n-1}}{\ln 10^{n-1}-1}\right)\overset{\pm}{=}C\left(\frac{10^{\frac{n+1}{2}}}{\ln 10^{n}-1}-\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1}-1}\right)$$

$$M_{1}\left(H\left(n\right)\right)=\frac{^{\pm}C10^{\frac{n+1}{2}}}{\ln 10^{n}-1}\quad,\quad M_{2}\left(H\left(n\right)\right)=-\frac{^{\pm}C10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1}-1}$$

$$M\left(H\left(n\right)\right)=M_{1}\left(H\left(n\right)\right)+M_{2}\left(H\left(n\right)\right)$$

因此，可得定理中$M\left(H\left(n\right)\right)$等的表达式

2) 偶位回文数$H\left(n-1\right)$中的素数问题

同理，$n-1$位偶位回文数$H\left(n-1\right)$较均匀地分布在最小最大值内，出现素数的平均概率记为$\overline{P}\left(H\left(n-1\right)\right)$，应正比于在该区间函自素数率$\overset{\circ}{P}\left(H\left(n-1\right)\right)$的平均值$\overset{\frown}{P}\left(H\left(n-1\right)\right)$

$$\overline{P}\left(H\left(n-1\right)\right)\overset{\pm}{=}C\overset{\frown}{P}\left(H\left(n-1\right)\right)\overset{\pm}{=}C\frac{\Pi\left(10^{n-1}-1\right)-\Pi\left(10^{n-2}\right)}{10^{n-1}-1-10^{n-2}}$$

$$\overline{P}\left(H\left(n-1\right)\right)\overset{\pm}{=}C\frac{li\left(10^{n-1}\right)-li\left(10^{n-2}\right)}{9*10^{n-2}}$$

计算$n-1$位偶位回文数$H\left(n-1\right)$的取值个数$u\left(H\left(n-1\right)\right)$：首尾两位数只能取 1 到 9，有 9 种取值个数；中间的$n-3$位数中，共有$\frac{n-3}{2}$位数可自由取值，每位数的数码可以取 0 到 9，产生$10^{\frac{n-3}{2}}$种取值个数，两者组合就是$n-1$位偶位回文数$H\left(n-1\right)$的取值总数$u\left(H\left(n-1\right)\right)$，即

$$u\left(H\left(n-1\right)\right)=9*10^{\frac{n-3}{2}}$$

$$M\left(H\left(n-1\right)\right)=u\left(H\left(n-1\right)\right)\overline{P}\left(H\left(n-1\right)\right)$$

$$=^{\pm}C\,9*10^{\frac{n-3}{2}}\frac{li\left(10^{n-1}\right)-li\left(10^{n-2}\right)}{9*10^{n-2}}$$

$$=\frac{{}^{\pm}C}{10^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{10^{n-1}}{\ln 10^{n-1}-1}-\frac{10^{n-2}}{\ln 10^{n-2}-1}\right)$$

$$M\left(H\left(n-1\right)\right)=^{\pm}C\left(\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1}-1}-\frac{10^{\frac{n-3}{2}}}{\ln 10^{n-2}-1}\right)$$

$$M_1\left(H\left(n-1\right)\right)=\frac{{}^{\pm}C10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1}-1}=-M_2\left(H\left(n\right)\right)$$

$$M_2\left(H\left(n-1\right)\right)=-\frac{{}^{\pm}C10^{\frac{n-3}{2}}}{\ln 10^{n-2}-1}=-\frac{M_1\left(H\left(n-2\right)\right)}{10}$$

$$M\left(H\left(2\right)\right)=M_2\left(H\left(n-1\right)\right)\Big|^{n=3}={}^{\pm}C\left(\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{\ln 10^{n-1}-1}-\frac{10^{\frac{n-3}{2}}}{\ln 10^{n-2}-1}\right)\Bigg|^{n=3}$$

$$M\left(H\left(2\right)\right)=^{\pm}B\left(\frac{10}{\ln 100-1}-\frac{1}{\ln 10-1}\right)=^{\pm}B1.40$$

相邻的奇位数n及偶位数$n-1$中的回文素数之和记为$M\left(H\left(n,n-1\right)\right)$，则

$$M\left(H\left(n,n-1\right)\right)=M\left(H\left(n\right)\right)+M\left(H\left(n-1\right)\right)$$

$$=M_1\left(H\left(n\right)\right)+M_2\left(H\left(n\right)\right)+M_1\left(H\left(n-1\right)\right)+M_2\left(H\left(n-1\right)\right)$$

$$M\left(H\left(n,n-1\right)\right)=M_1\left(H\left(n\right)\right)-\frac{M_1\left(H\left(n-2\right)\right)}{10}$$

$$M\left(H\left(2\right)\right)=M_2\left(H\left(2\right)\right)=^{\pm}C1.40$$

整理上式得定理中$M\left(H\left(n\right)\right)$、$M\left(H\left(2\right)\right)$等的表达式

计算$\Pi\left(H\left(N\right)\right)$如下

个位数不存在回文数，两位的回文素数只有 11 一个，令

$$\pi\left(H\left(1\right)\right)=\Pi\left(H\left(1\right)\right)=0\quad,\quad\pi\left(H\left(2\right)\right)=1$$

$$\Pi\left(H\left(N\right)\right)=M\left(H\left(2\right)\right)+\sum_{k=1}^{N-1}M\left(H\left(2k+1\right)\right)$$

$$\Pi(H(N))=\Pi(H(N-2))+M(H(N))$$

其中

$$\Pi(H(2))=M(H(2))=^{\pm}B1.40$$

得定理中$\Pi(H(N))$等的表达式。数据如表 3.3，表 3.4

表 3.3　N 位自然数中回文素数个数数据表

N	$m(H(N))$	$M(H(N))_0$	$M(H(N-1))_0$	$M(H(N))_0$	$^{\pm}C$
2	1	2.17	0.77	1.40	0．71
3	15	16.93	0.77	16.16	0．93
5	93	95.12	1.69	93.43	0.995
7	668	661.5	9.51	652.0	1.0245
9	5172	5070.2	66.1	5004.3	1.0336
11	42042	41104.2	507.0	40597.2	1.0356
13	353701	345619	4110	341509	1.03570
15	3036643	2981623	34562	2947061	1.03040
17	27045226	26216480	298162	26514642	1.04348

$$M_1(H(N))_0=\frac{10^{(N+1)/2}}{\ln 10^{n}-1}\quad，\quad M_2(H(N-1))_0=\frac{10^{(N-3)/2}}{\ln 10^{n-2}-1}$$

$$M(H(N))_0=M_1(H(N))_0-M_2(H(N-1))_0$$

$$^{\pm}B=m(H(N))\div M(H(N))_0$$

表 3.3　不大于 N 位自然数中回文素数累计个数数据表

N	$\pi(H(N))$	$M(H(N))_0$	$\Pi(H(N))_0$	$^{\pm}C_\pi$
2	1	1.40	1.4	0.71
3	16	16.16	17.56	0.911
5	109	93.43	111.0	0.982
7	777	652.0	763.0	1.0183
9	5949	5004.3	5767	1.0316
11	47991	40597.2	46364	1.03509
13	401692	341509	387873	1.03562
15	3438335	2947061	3334934	1.03101
17	30483561	26514642	29849576	1.02124

其中

$$\Pi(H(1))_0=0$$

$$\Pi(H(2))_0=M(H(2))_0=^{\pm}1.40$$

$$\Pi(H(N))_0=\Pi(H(N-2))_0+M(H(N))_0$$

$$^{\pm}C_{\pi} = \pi\left(H\left(N\right)\right) \div \Pi\left(H\left(N\right)\right)_{0}$$

在 S 进制中， 偶回文素数仍仅有 11，它在十进制中的值为 S+1，2 进制的回文素数最多

从数据表中显示 $^{\pm}C_{\pi}$ 有向 1 逼近的趋势，这可能是等几素数问题

定理 13 令 n、N 是不小于 3 的奇数，在 S 进制中，n 及 $n-1$ 位回文数记为 $H\left(S,n\right)$ 、$H\left(S,n-1\right)$，它们出现素数的实际个数、理论个数及它们之和，分别记为 $m\left(H\left(S,n\right)\right)$ 、$M\left(H\left(S,n\right)\right)$ 、 $m\left(H\left(S,n-1\right)\right)$ 、 $M\left(H\left(S,n-1\right)\right)$ 、 $m\left(H\left(S,n,n-1\right)\right)$ 、$M\left(H\left(S,n,n-1\right)\right)$，即

$$m\left(H\left(S,n,n-1\right)\right) = m\left(H\left(S,n\right)\right) + m\left(H\left(S,n-1\right)\right) = m\left(H\left(S,n\right)\right)$$

$$\left(n = 2k+1 \geq 5\right)$$

$$M\left(H\left(S,n,n-1\right)\right) = M\left(H\left(S,n\right)\right) + M\left(H\left(S,n-1\right)\right)$$

当 $n \leq N$ 时，它们的个数之和表为 $\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 、$\Pi\left(H\left(S,N\right)\right)$，即

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right) = \sum_{n=1}^{N} m\left(H\left(S,n\right)\right) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} m\left(H\left(S,2k+1\right)\right) + m\left(H\left(S,2\right)\right)$$

$$\Pi\left(H\left(S,N\right)\right) = \sum_{n=1}^{N} M\left(H\left(S,n\right)\right)$$

则

$$M\left(H\left(S,n\right)\right) =^{\pm} C \frac{li\left(S^{n}\right) - li\left(S^{n-1}\right)}{S^{(n-1)/2}} \qquad (63)$$

$$M\left(H\left(S,n-1\right)\right) =^{\pm} C \frac{li\left(S^{n-1}\right) - li\left(S^{n-2}\right)}{S^{\frac{n-1}{2}}} \qquad (64)$$

$$m\left(H\left(S,n\right)\right) =^{1} M\left(H\left(S,n,n-1\right)\right) =^{\pm} C\left(\frac{S^{\frac{n+1}{2}}}{\ln S^{n}-1} - \frac{S^{\frac{n-3}{2}}}{\ln S^{n-2}-1}\right) \qquad (65)$$

$$m\left(H\left(S,n\right)\right) =^{1} M\left(H\left(S,n,n-1\right)\right) \qquad (66)$$

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right) = \pi\left(H\left(S,N-2\right)\right) + m\left(H\left(S,N\right)\right) =^{1} \Pi\left(H\left(S,N\right)\right) \qquad (67)$$

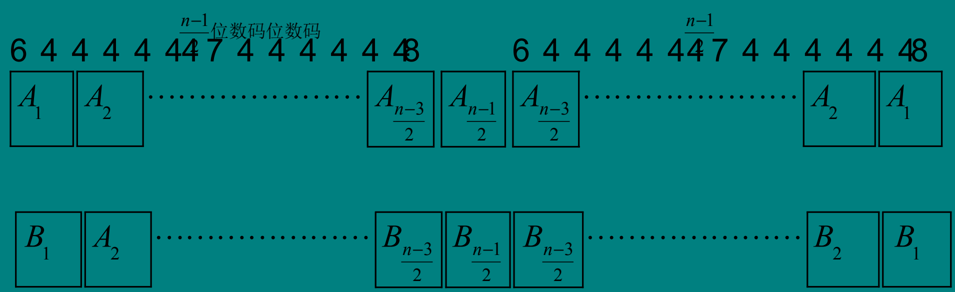
$$\Pi\left(H\left(S,N\right)\right)=\Pi\left(H\left(S,N-2\right)\right)+M\left(H\left(S,N,N-1\right)\right) \tag{68}$$

证明　与 10 进制的证明过程相似，只需在 10 进制的证明过程及结果中，用 S 代替 10 即可获得本定理的结果

3. 2.2 回文素数对的个数

注意：下面叙述中，涉及回文数对的量，有些在下标处加字符“ p ”

定义 2 当两个均是 n 位数的 S 进制的整数 $H_1\left(S,n\right)$ 、 $H_2\left(S,n\right)$ ，对应位数的数码之和等于 S 时，称它俩为 n 位数 S 进制整数对，简称整数对，简记为 $H_{\text{p}}\left(S,n\right)$ ；当它俩均是回文数时，简称回文数对；当它俩均是回文数素数时，简称回文素数对



$$A_1+B_1=A_2+B_2=\cdots\cdots=A_i+B_i=\cdots\cdots=A_{\frac{n-1}{2}}+B_{\frac{n-1}{2}}=S$$

回文数对示意图

引理 6　将奇位数奇回文数对 $\left(H_1\left(n\right),H_2\left(n\right)\right)$ ，即 $H_{\text{p}}\left(S,n\right)$ 的取值个数记为 $u\left(H_p\left(n\right)\right)$ ；将偶位数奇回文数对 $\left(H_1\left(n-1\right),H_2\left(n-1\right)\right)$ ，即 $H_{\text{p}}\left(S,n-1\right)$ 的取值个数记为 $u\left(H_p\left(n-1\right)\right)$ ，且

$$H_{11}\left(S,n\right)<H_{12}\left(S,n\right)$$

$$H_{21}\left(S,n-1\right)<H_{22}\left(S,n-1\right)$$

则

$$\text{S}^{\text{n}-1}\le H_{11}\left(S,n\right)=\sum_{\text{J}=1}^{\text{n}}\text{S}^{\text{J}}-H_{12}\left(S,n\right)\le\sum_{\text{J}=1}^{\text{n}}\frac{\text{S}^{\text{J}}}{2} \tag{69}$$

$$u\left(H_p\left(S,n\right)\right)=0.25\left(S-1\right)^{\frac{n+1}{2}} \tag{70}$$

$$S^{n-2} \le H_{21}\left(S,n-1\right) = \sum_{J=1}^{n} S^{J-1} - H_{22}\left(S,n-1\right) \le \sum_{J=1}^{n-1} \frac{S^{J}}{2} \qquad (71)$$

$$u\left(H_{p}\left(S,n-1\right)\right) = 0.25S\sum_{J=0}^{(n-1)/2}\left(S-1\right)^{J} \qquad (72)$$

证明　1）　依定义

$$H_{1}\left(S,n\right) = \sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}} A_{J}\left(S^{J}+S^{n-1-J}\right) + A_{\frac{n-1}{2}} S^{\frac{n-1}{2}}$$

$$H_{2}\left(S,n\right) = \sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}} B_{J}\left(S^{J}+S^{n-1-J}\right) + B_{\frac{n-1}{2}} S^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\left(A_{J}+B_{J}\right) = S \ , \quad A_{J}B_{J} \ne 0 \qquad \left(0 \le J \le n-1\right)$$

得

$$H_{1}\left(S,n\right) + H_{2}\left(S,n\right) = \sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}} A_{J}\left(S^{J}+S^{n-1-J}\right) + A_{\frac{n-1}{2}} S^{\frac{n-1}{2}}$$

$$+\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}} B_{J}\left(S^{J}+S^{n-1-J}\right) + B_{\frac{n-1}{2}} S^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}} \left(A_{J}+B_{J}\right)\left(S^{J}+S^{n-1-J}\right) + \left(A_{\frac{n-1}{2}} + B_{\frac{n-1}{2}}\right) S^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}} \left(S^{J+1}+S^{n-J}\right) + S^{\frac{n+1}{2}} = \sum_{J=1}^{n} S^{J}$$

$$H_{1}\left(S,n\right) = \sum_{J=1}^{n} S^{J} - H_{2}\left(S,n\right)$$

因

$$H_{1}\left(S,n\right) < H_{2}\left(S,n\right)$$

得

$$S^{n-1} \le H_{1}\left(S,n\right) = \sum_{J=1}^{n} S^{J} - H_{2}\left(S,n\right) \le \sum_{J=1}^{n} \frac{S^{J}}{2}$$

$H_{2}\left(S,n\right)$ 的值完全由 $H_{1}\left(S,n\right)$ 决定。当 $H_{1}\left(S,n\right)$ 是回文数时，只有 $\frac{n+1}{2}$ 位数上的数码可以自由取值，产生 $S^{\frac{n+1}{2}}$ 个取值个数，但这些取值个数中，有一半分布在

$\left(S^{n-1},\sum_{J=1}^{n}\frac{S^{J}}{2}\right)$，另一半分布在$\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{S^{J}}{2},\sum_{J=1}^{n}S^{J}\right)$。因规定$H_{11}(S,n)$在$\left(S^{n-1},\sum_{J=1}^{n}\frac{S^{J}}{2}\right)$内取值，故$H_1(S,n)$作为回文数时的取值个数是$0.5S^{\frac{n+1}{2}}$，$H_1(S,n)$是奇回文数时的个数等于$0.25S^{\frac{n+1}{2}}$；$H_1(S,n)$是回文数对时，$H_1(S,n)$的每一位数上，都不能取数0的数码，只有$S-1$个可自由取值的数码，产生$0.25(S-1)^{\frac{n+1}{2}}$个取值个数，故回文数对$H_p(S,n)$的取值个数记为$u(H_p(S,n))$，可表为

$$u(H_p(S,n))=0.25(S-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

得定理中$u(H_p(S,n))$值及$H_p(S,n)$等分布范围的表达式

2） 同理，由

$$H_1(S,n-1)=\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}}a_J\left(S^J+S^{n-2-J}\right)$$

$$H_2(S,n-1)=\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}}b_J\left(S^J+S^{n-2-J}\right)$$

$$(a_J+b_J)=S\ ,\quad a_Jb_J\neq 0\qquad (0\leq J\leq n-1)$$

得

$$H_1(S,n-1)+H_2(S,n-1)$$

$$=\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}}a_J\left(S^J+S^{n-2-J}\right)\ +\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}}b_J\left(S^J+S^{n-2-J}\right)$$

$$=\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}}(a_J+b_J)\left(S^J+S^{n-2-J}\right)$$

$$=\sum_{J=0}^{\frac{n-3}{2}}\left(S^{J+1}+S^{n-1-J}\right)=\sum_{J=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(S^J+S^{n-2-J}\right)$$

$$H_1(S,n-1)+H_2(S,n-1)=\sum_{J=1}^{n}S^{J-1}$$

因

$$H_1(S,n-1)<H_2(S,n-1)$$

得

$$S^{n-2} \le H_1(S,n-1) = \sum_{J=1}^{n} S^{J-1} - H_2(S,n-1) \le \sum_{J=1}^{n} \frac{S^{J-1}}{2} = \frac{S}{2}\sum_{J=1}^{n} S^{J-2}$$

$H_2(S,n-1)$ 的值完全由 $H_1(S,n-1)$ 决定

作为回文数对的 $H_p(S,n-1)$ 的取值个数 $u(H_p(S,n-1))$，不仅可用分析 $u(H_p(S,n))$ 的方法进行计算，下面还从另一思路分析 $H_1(S,n-1)$ 的取值个数：逐个统计 $H_p(S,n-1)$ 的取值个数 $u(H_p(S,n-1))$

$H_1(S,n-1)$ 取最大值时，每位数的数码都取 $0.5S$

(1)　S^0 位数取 $0.5S$ 时，S^1 位数可取 1 到 $0.5S$，得到 $0.5S$ 个取值个数

S^0 位数取 1 到 $0.5S-1$ 时，S^1 位数可取 1 到 S，产生 $(0.5S-1)S$ 个取值个数，故 S^0 到 S^1，共产生取值组合个数为

$$0.5S+(0.5S-1)S = 0.5(S-1)S = 0.5(S-1)^2+0.5(S-1) = 0.5\sum_{J=1}^{2}(S-1)^J$$

(2)　S^0、S^1 位数都取 $0.5S$ 时，S^2 位数可取 1 到 $0.5S$，得到 $0.5S$ 个取值个数

S^0、S^1 位数在定义域内取其余值时，S^2 位数取 1 到 S 时，产生 $\left(0.5\sum_{J=1}^{2}(S-1)^J-1\right)S$ 个取值个数，故 S^0 到 S^2，共产生取值组合个数为

$$\left(0.5\sum_{J=1}^{2}(S-1)^J-1\right)S+0.5S = 0.5\left(\sum_{J=1}^{2}(S-1)^J-1\right)S = 0.5\sum_{J=1}^{3}(S-1)^J$$

(3)　同理　S^0 到 S^3、共产生取值组合个数为　$0.5S\sum_{J=1}^{3}(S-1)^J$

…………

(4)　同理　S^0 到 $S^{\frac{n-1}{2}}$、共产生取值组合个数为　$0.5S\sum_{J=1}^{\frac{n-1}{2}}(S-1)^J$

因 $H_1(S,n-1)$ 只有 $\frac{n-1}{2}$ 位数上的数码可以自由取值，故 $H_1(S,n-1)$ 的取值个数 $u(H_1(S,n-1))$ 为

$$u\left(H_1\left(S,n-1\right)\right)=0.5S\sum_{J=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(S-1\right)^J$$

$H_1\left(S,n-1\right)$ 取奇回文数对的个数 $u\left(H_p\left(S,n-1\right)\right)$ 等于 $0.5S\sum_{J=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(S-1\right)^J$ 的一半

$$u\left(H_p\left(S,n-1\right)\right)=0.25S\sum_{J=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(S-1\right)^J$$

得定理中 $u\left(H_p\left(S,n-1\right)\right)$ 值及 $H_p\left(S,n-1\right)$ 等分布范围的表达式，如用分析 $u_p\left(H\left(S,n\right)\right)$ 的方法分析 $u_p\left(H\left(S,n-1\right)\right)$，不难看出会得出同一结果，证毕

下面先以 10 进制进行分析

三位数及五位数的 10 进制回文素数对，各五组 ： (181,929)、(191,919)、(313,797)、(353,757)、(383,727)；(12421,98689)、(12721,98389)、(14341,96769)、(17971,93139) 及 (32323,78787)

引理 7 自然数中，奇数的素数概率，等于它附近自然数素数概率的两倍

证明　略

定理 14 n、N 是不小于 3 的奇数， 回文素数对只出现在奇位数中，在十进制中，奇数 n 及偶数 $n-1$ 位数的奇回文数对记为 $\left(H_1\left(n\right),H_2\left(n\right)\right)$、$\left(H_1\left(n-1\right),H_2\left(n-1\right)\right)$，简记为 $H_p\left(n\right)$、$H_p\left(n-1\right)$，其回文素数对的个数及它们之和，记为 $m\left(H_p\left(n\right)\right)$、$M\left(H_p\left(n\right)\right)$、$m\left(H_p\left(n-1\right)\right)$、$M\left(H_p\left(n-1\right)\right)$、$m\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)$、$M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)$

$$m\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)=m\left(H_p\left(n\right)\right)+m\left(H_p\left(n-1\right)\right)$$

$$M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)=M\left(H_p\left(n\right)\right)+M\left(H_p\left(n-1\right)\right)$$

则

$$m\left(H_p\left(n-1\right)\right)=0 \tag{73}$$

$$m\left(H_p\left(n\right)\right)=^1 M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right) \tag{74}$$

$$M\left(H_p\left(n\right)\right)=^{\pm} C_p^2\,9^{\frac{n+1}{2}}\ln^{-2}\left(10^{\mathrm{n+1}}\div 18\right) \tag{75}$$

$$M\left(H_p\left(n-1\right)\right)=^{\pm} C_p^2\,9^{\frac{n-1}{2}}\ln^{2}\left(10^{\mathrm{n}}\div 18\right) \tag{76}$$

$$M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)=\frac{^{\pm}C_p^2\,9^{\frac{n+1}{2}}}{\ln^{-2}\left(10^{\mathrm{n+1}}\div 18\right)}+\frac{^{\pm}C_p^2\,9^{\frac{n-1}{2}}}{\ln^{-2}\left(10^{\mathrm{n}}\div 18\right)} \tag{77}$$

在 $n \le N$ 内，回文素数对的组数 $m\left(H_p\left(n\right)\right)$ 、$M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)$ 之和，分别记为 $\pi\left(H_p\left(N\right)\right)$ 、$\Pi\left(H_p\left(N\right)\right)$，则

$$\pi\left(H_p\left(N\right)\right)=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} m\left(H_p\left(2k+1\right)\right)=\pi\left(H_p\left(N-2\right)\right)+m\left(H_p\left(N\right)\right) \quad (78)$$

$$\Pi\left(H_p\left(N\right)\right)=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} M\left(H_p\left(2k+1,2k\right)\right)$$

$$=\Pi\left(H_p\left(N-2\right)\right)+M\left(H_p\left(N,N-1\right)\right) \quad (79)$$

证明　证明时，可直接引用上面的引理。与回文素数的证明过程相似，虽然实际的回文素数对，只出现在奇位数的回文数中，但在素数公理的体系下，计算素数对的理论值时，仍然要统计偶位数码的回文素数对的概率，为此，令

$$H_1\left(n\right)<H_2\left(n\right) \quad , \quad H_1\left(n-1\right)<H_2\left(n-1\right)$$

下面分析奇回文数对的情况

根据回文数对的定义，回文数对每一位数上的数码，均不能取零，只能取 1 到 9，共 9 个数码。$\left(H_1\left(n\right),H_2\left(n\right)\right)$、$\left(H_1\left(n-1\right),H_2\left(n-1\right)\right)$、或简写为 $H_p\left(n\right)$、$H_p\left(n-1\right)$，它们单独及同时出现回文素数或回文素数对的素数率，分别记为 $P\left(H_1\left(n\right)\right)$ 、$P\left(H_2\left(n\right)\right)$ 、$P\left(H_1\left(n-1\right)\right)$ 、$P\left(H_2\left(n-1\right)\right)$ 、$P\left(H_p\left(n\right)\right)$ 、$P\left(H_p\left(n-1\right)\right)$；将奇位数奇回文数对 $H_p\left(n\right)$ 的取值个数记为 $u\left(H_p\left(n\right)\right)$；将偶位数奇回文数对 $H_p\left(n-1\right)$ 的取值个数记为 $u\left(H_p\left(n-1\right)\right)$

由于只研究回文数对 $H_p\left(n\right)$ 、$H_p\left(n-1\right)$ 中，回文数是奇数的情况，又它们的素数率 $P\left(H_p\left(n\right)\right)$ 、$P\left(H_p\left(n-1\right)\right)$ 几乎等于一般 n、$n-1$ 位回文数的函自素数率 $\mathring{P}\left(H_p\left(n\right)\right)$ 、$\mathring{P}\left(H_p\left(n-1\right)\right)$ 的两倍，回文数的素数率系数记为 ${}^{\pm}C_p$， 则

$$P\left(H_1\left(n\right)\right)={}^{\pm}C_p 2\mathring{P}\left(H_1\left(n\right)\right)$$

$$P\left(H_2\left(n\right)\right)={}^{\pm}C_p 2\mathring{P}\left(H_2\left(n\right)\right)$$

$$P\left(H_1\left(n-1\right)\right)={}^{\pm}C_p 2\mathring{P}\left(H_1\left(n-1\right)\right)$$

$$P\left(H_2\left(n-1\right)\right)={}^{\pm}C_p 2\mathring{P}\left(H_2\left(n-1\right)\right)$$

$$P\left(H_p(n)\right)=P\left(H_1(n)\right)P\left(H_2(n)\right)$$

$$=^{\pm} C\ \breve{P}\left(H_p(n)\right)=^{\pm} C_p^2 4\breve{P}\left(H_1(n)\right)\breve{P}\left(H_2(n)\right)$$

同理，有

$$P_p\left(H(n-1)\right)=P\ \left(H_1(n-1)\right)P\ \left(H_2(n-1)\right)$$

$$=^{\pm} C\ \breve{P}\left(H_p(n-1)\right)=^{\pm} C_p^2 4\breve{P}\left(H_1(n-1)\right)\breve{P}\left(H_2(n-1)\right)$$

因 n 位回文数对 $H_p(n)$ 较均匀地分布在它们的定义域 $\left(10^{n-1},\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}\right)$、$\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2},\sum_{J=1}^{n}10^J\right)$ 的自然数中，$\left(H_1(n),H_2(n)\right)$，即 $H_p(n)$ 在定义域的平均素数率 $\overline{P}\left(H_p(n)\right)$ 几乎正比于 $H_1(n)$、$H_2(n)$ 在其定义域内奇数函自素数率 $\breve{P}\left(H_p(n)\right)$ 的平均值 $\breve{P}\left(H_p(n)\right)$，则

$$\overline{P}\left(H_p(n)\right)=^{1}\overline{P\left(H_1(n)\right)P\left(H_2(n)\right)}=^{\pm} C\breve{P}\left(H_p(n)\right)$$

$$=\overline{^{\pm}C_p^2 4\breve{P}\left(H_1(n)\right)\breve{P}\left(H_2(n)\right)}=^{\pm} C_p^2 4\breve{P}\left(H_1(n)\right)\breve{P}\left(H_2(n)\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}-10^{n-1}+1\right)^{-1}\sum_{H_1(n)=10^{n-1}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}}P\left(H_1(n)\right)P\left(H_2(n)=\sum_{J=1}^{n}10^J-H_1(n)\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}-10^{n-1}+1\right)^{-1}\int_{10^{n-1}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}}P\left(H_1(n)=t\right)P\left(H_2(n)=\sum_{J=1}^{n}10^J-t\right)dt$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}-10^{n-1}+1\right)^{-1}\int_{10^{n-1}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}}\ln t\ln\left(\sum_{J=1}^{n}10^J-t\right)dt$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}-10^{n-1}+1\right)^{-1}\ln^{-2}\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}\right)\int_{10^{n-1}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}}dt$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}-10^{n-1}+1\right)^{-1}\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^J}{2}-10^{n-1}\right)\ln^{-2}\left(\frac{10^{n+1}}{18}\right)$$

$$\overline{P}\left(H_p(n)\right)=^{\pm} C_p^2 4\ln^{-2}\left(10^{n+1}\div 18\right)$$

$$M\left(H_p(n)\right)=\bar{P}\left(H_p(n)\right)u\left(H_p(n)\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left[\ln^{-2}\left(10^{n+1}\div 18\right)\right]0.25(10-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$M\left(H_p(n)\right)=^{\pm} C_p^2 9^{\frac{n+1}{2}}\ln^{-2}\left(10^{n+1}\div 18\right)$$

得定理中$M\left(H_p(n)\right)$的表达式

同理

$$\bar{P}\left(H_p(n-1)\right)=^{1}\overline{P\left(H_1(n-1)\right)P\left(H_2(n-1)\right)}=^{\pm} C\overset{S}{P}\left(H_p(n-1)\right)$$

$$=\overline{^{\pm}C_p^2 4\overset{S}{P}\left(H_1(n-1)\right)\overset{S}{P}\left(H_2(n-1)\right)}=^{\pm} C_p^2 4\overset{S}{P}\left(H_1(n-1)\right)\overset{S}{P}\left(H_2(n-1)\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\sum_{H_1(n-1)=10^{n-2}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}} P\left(\overset{S\to}{H_1}(n-1)\right)P\left(\overset{S\to}{H_2}(n)=\sum_{J=1}^{n}10^{J-1}-H_1(n-1)\right)\div\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}-10^{n-2}+1\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\int_{10^{n-2}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}} P\left(\overset{S\to}{H_1}(n)=t\right)P\left(\overset{S\to}{H_2}(n)=\sum_{J=1}^{n}10^{J-1}-t\right)dt\div\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}-10^{n-1}+1\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\int_{10^{n-2}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}}\ln t\ln\left(\sum_{J=1}^{n}10^{J-1}-t\right)dt\div\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}-10^{n-2}+1\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\ln^{-2}\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}\int_{10^{n-2}}^{\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}}dt\div\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}-10^{n-2}+1\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}-10^{n-2}\right)\left(\ln^{-2}\frac{10^n}{18}\right)\div\left(\sum_{J=1}^{n}\frac{10^{J-1}}{2}-10^{n-2}+1\right)$$

$$\bar{P}\left(H_p(n-1)\right)=^{\pm} C_p^2 4\ln^{-2}\left(10^{n}\div 18\right)$$

$$M\left(H_p(n-1)\right)=\bar{P}\left(H_p(n-1)\right)u\left(H_p(n-1)\right)$$

$$=^{\pm} C_p^2 4\left[\ln^{-2}\left(10^{n}\div 18\right)\right]0.25(10-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$M\left(H_p(n-1)\right)=^{\pm} C_p^2 9^{\frac{n-1}{2}}\ln^{-2}\frac{10^n}{18}=\frac{^{\pm}C^2 9^{\frac{n-1}{2}}}{\ln\left(10^n\div 18\right)}$$

得定理中$M\left(H_p\left(n-1\right)\right)$的表达式

奇数n位与偶数$n-1$位回文素数对之和的理论值记为$M_p\left(H\left(n,n-1\right)\right)$，则

$$M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)=M\left(H_p\left(n\right)\right)+M\left(H_p\left(n-1\right)\right)$$

代入有关量，得定理中$M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)$表达式。

在$n\le N$内，回文素数对之和记为$\pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)$、$\Pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)$，则

$$\pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)=\sum_{n=3}^{N}m\left(H_p\left(n\right)\right)=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}m\left(H_p\left(2k+1\right)\right)$$

$$=\pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N-2\right)\right)+m\left(H_p\left(N\right)\right)={}^{1}\Pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)$$

$$\Pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)=\Pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N-2\right)\right)+M\left(H_p\left(N,N-1\right)\right)$$

整理上式，得定理中$\pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)$、$\Pi\left(H_{\mathrm{p}}\left(N\right)\right)$的表达式，数据如表 3.5

表 3.5　n 位自然数中回文素数对数据表

n	$m\left(H_p\left(n\right)\right)$	$M\left(H_p\left(n\right)\right)_0$	$M\left(H_p\left(n-1\right)\right)_0$	$M_p\left(N\right)$	$^{\pm}C_p^2$	$^{\pm}C_p$
3	5	2．0	2．6	4．6	1．09	1．04
5	5	6.1	1．1	7．2	0．69	0．83
7	36	27．2	4．2	31．4	1．15	1．07
9	351	145．6	20．6	166．2	2．11	1．45
11	950	868．2	117．3	985．5	0．964	0．982
13	5976	5554	727	6281	0．9515	0．975

其中

$$M\left(H_p\left(n\right)\right)_0=\frac{9^{\frac{n+1}{2}}}{\ln^2\left(10^{n+1}\div18\right)}\quad,\quad M\left(H_p\left(n-1\right)\right)_0=\frac{9^{\frac{n-1}{2}}}{\ln^2\left(10^{n}\div18\right)}$$

$$M_p=M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)_0=M\left(H_1\left(n\right)\right)_0+M\left(H_2\left(n-1\right)\right)_0$$

$$^{\pm}C_p^2=\frac{m\left(H_p\left(n\right)\right)}{M\left(H_p\left(n,n-1\right)\right)_0}=\frac{m\left(H_p\left(n\right)\right)}{M_p\left(N\right)}$$

$$\pi_{\mathrm{p}}\left(H\left(1\right)\right)_0=\Pi_{\mathrm{p}}\left(H\left(1\right)\right)_0=0$$

$$\pi_{\mathrm{p}}\left(H\left(N\right)\right)_0=\pi_{\mathrm{p}}\left(H\left(N-2\right)\right)_0+m_p\left(H\left(N\right)\right)_0$$

$$\Pi_p\left(H(N)\right)_0=\Pi_p\left(H(N-2)\right)_0+M_p\left(H(N,N-1)\right)_0$$

不大于 N 位自然数中回文素数对累计数据表，如表 3.6 所示

表 3.6　不大于 N 位自然数中回文素数对累计数据表

N	$m\left(H_p(N)\right)$	$M_p(N)$	$\pi_p(N)$	$\Pi_p(N)$	${}^{\pm}C_{\pi}^{2}$	${}^{\pm}C_{\pi}$
3	5	4．6	5	4．6	1．09	1．04
5	5	7．2	10	11．8	1．02	0．85
7	36	31．4	46	43．2	1．12	1．06
9	351	166．2	397	209．4	1．70	1．31
11	950	985．5	1347	1195	1．12 9	1．06
13	5976	6281	7323	7476	0．97 9	0．99

其中

$$\pi_p(N)=\sum_{t=1}^{\frac{N-1}{2}}m\left(H_p(t)\right)\quad,\quad\Pi_p(N)=\sum_{t=1}^{\frac{N-1}{2}}M_p(t)$$

$${}^{\pm}C_{\pi}^{2}=\frac{\pi\left(H_p(N)\right)}{\Pi\left(H_p(N)\right)_0}=\frac{\pi_p(N)}{\Pi_p(N)}$$

从数据表中可以看出，实际数据支持理论结果。回文素数对的实际数据与理论值的相对误差，比回文素数的大一点，理论上分析将支持这一结果：相同位数的回文素数对，比回文素数少，故相对误差就大。可说明从数据表中反应出的这个规律是正确的，也说明理论结果的正确性。 ${}^{\pm}C_{\pi}$ 的值向 1 逼近，回文素数对问题可能是等几素数问题

定理 15　n、N 是不小于 3 的奇数， 回文素数对只出现在奇位数中，在 S 进制中，奇数 n 及偶数 $n-1$ 位数的回文素数对的个数记为 $m\left(H_p(S,n)\right)$、$M\left(H_p(S,n)\right)$、$m\left(H_p(S,n-1)\right)$、$M\left(H_p(S,n-1)\right)$、$m\left(H_p(S,n,n-1)\right)$、$M\left(H_p(S,n,n-1)\right)$

$$m\left(H_p(S,n,n-1)\right)=m\left(H_p(S,n)\right)+m\left(H_p(S,n-1)\right)$$

$$M\left(H_p(S,n,n-1)\right)=M\left(H_p(S,n)\right)+M\left(H_p(S,n-1)\right)$$

则

$$m\left(H_p(S,n-1)\right)=0\qquad(80)$$

$$m\left(H_p(S,n)\right)=^{1}M\left(H_p(S,n,n-1)\right)\qquad(81)$$

$$M\left(H_p(S,n)\right)=^{\pm}C^{2}(S-1)^{\frac{n+1}{2}}\ln^{-2}\left(S^{n+1}\div 2(S-1)\right)\qquad(82)$$

$$M\left(H_p\left(S,n-1\right)\right)=^{\pm}C^2\left(S-1\right)^{\frac{n-1}{2}}\ln^{-2}\left(\mathrm{S}^{\mathrm{n}}\div 2\left(S-1\right)\right) \tag{83}$$

$$M\left(H_p\left(S;n,n-1\right)\right)=\frac{^{\pm}C^2\left(S-1\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\ln^{-2}\left(\mathrm{S}^{\mathrm{n+1}}\div 2\left(S-1\right)\right)}+\frac{^{\pm}C^2\left(S-1\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\ln^{-2}\left(\mathrm{S}^{\mathrm{n}}\div 2\left(S-1\right)\right)} \tag{84}$$

在 $n\le N$ 内回文素数对的 $m\left(H_p\left(S,n\right)\right)$、$M\left(H_p\left(S,n,n-1\right)\right)$ 之和记为 $\pi\left(H_p\left(S,N\right)\right)$、$\Pi\left(H_p\left(S,N\right)\right)$，则

$$\pi\left(H_p\left(S,N\right)\right)=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}m\left(H_p\left(S,2k+1\right)\right)$$

$$=\pi\left(H_p\left(S,N-2\right)\right)+m\left(H_p\left(S,N\right)\right) \tag{85}$$

$$\Pi\left(H_p\left(S,N\right)\right)=\Pi\left(H_p\left(S,N-2\right)\right)+M\left(H_p\left(S,N,N-1\right)\right) \tag{86}$$

证明　与“10 进制自然数中回文素数对的个数”一节相似，此略

第四章　　函数素数问题

本章讨论函数素数问题的求解方法，同样，这一方法也 适 合 于 解决条件素数问题

4.　1　整数变量函数的素数问题

4. 1.1 一元一维函数的素数个数及定性判断

定义 1 在 $t \le x$ 内，变量 t 及函数 $H(t)$ 中的素数个数实际值和理论值，分别记为 $\pi(x)$ 、$\Pi(x)$ 、$\pi(H(x))$ 、$\Pi(H(x))$，则

$$\pi(H(x)) = \sum_{t \le x}\left[\pi(H)\Big|^{H=H(t)} - \pi(H-1)\Big|^{H=H(t)}\right] =^{1} \Pi(H(x)) \qquad (1)$$

也将 $\pi(H(x))$ 称为一元函数 $H(x)$ 素数定理。其中 ， $\pi(x)$ 是自然数的素数定理——小于 x 的自然数中的素数个数

定 理 1 当 $t \le N$ 时， 函 数 $H(t)$ 中， 出 现 素 数 的 实 际 个 数 及 理 论 个 数， 记 为 $\pi(H(N))$ 、$\Pi(H(N))$，则

1）

$$\pi(H(N)) =^{1} \Pi(H(N)) = \int^{N} \frac{{}^{\pm}C\,dt}{\ln H(t)} \qquad (2)$$

2） $H(t)$ 中有无限个素数的必要条件为

$$H(t) \le A\exp(Bt\ln t\ln\ln t) \qquad (3)$$

当 $H(t)$ 中已发现若干个素数时，此条件是充分条件

3） $H(t)$ 中仅有限个素数的充分条件为

$$H(t) \ge A\exp(Bt\ln t\ln\ln^{1+\varepsilon} t) \qquad (4)$$

其中

1、A、B 是常数

2、$^{\pm}C$ 称为素数率系数，前面的“函数的素数率定理”已证明：当 $H(t)$ 是等几函数时，

$^{\pm}C =^{1} 1$，否则 $^{\pm}\overline{C} > 1$，

3、上面定性判断两个条件还可略作改进，此略

证明　1）　由前面的“函数的素数率定理”得

$$\pi(H(N)) =^{1} \Pi(H(x)) =^{1} \int^{N} P(H(t))\,dt = \int^{N} \frac{^{\pm}C\,dt}{\ln H(t)}$$

得 (2)

2）　当 $H(t) \le A\exp(Bt\ln t\ln\ln t)$ 时，有

$$\lim_{N\to\infty}\pi(H(N)) = \lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N} P(H(t))\,dt = \lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{^{\pm}C\,dt}{\ln H(t)} \ge \lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{\ln\left[A\exp(Bt\ln t\ln\ln t)\right]}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{\ln A + Bt\ln t\ln\ln t} = \lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{Bt\ln t\ln\ln t} = \lim_{N\to\infty}\frac{^{\pm}C}{B}\ln\ln\ln N \to \infty$$

得 (3)，如果函数 $H(t)$ 有公因子，就没有素数，故只是必要条件，如果 $H(t)$ 中有若干个素数，则有无穷多个素数

3）　当 $H(t) \ge A\exp\left(Bt\ln t\ln\ln^{1+\varepsilon} t\right)$ 时，有

$$\lim_{N\to\infty}\pi(H(N)) = \lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N} P(H(t))\,dt = \lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{^{\pm}C\,dt}{\ln H(t)} \le \lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{\ln\left[A\exp\left(Bt\ln t\ln\ln^{1+\varepsilon} t\right)\right]}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{\ln A + Bt\ln t\ln\ln^{1+\varepsilon} t} = \lim_{N\to\infty}\int_{\pm 2}^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{Bt\ln t\ln\ln^{1+\varepsilon} t} = \lim_{N\to\infty}\left(K - \frac{^{\pm}C}{B\ln\ln^{\varepsilon} N}\right) = K$$

得 (4) 式

依此类推，可将一元一维函数素数个数及定性判断，推广到多元一维、一元多维、及多元多维情况中，此略

4.1.2 整数变量函数素数个数均方差及重对数边界

定理 2　$x \le N$ 的函数 $H(x)$ 中，素数个数 $\pi(H(x))$ 的均方差及重对数边界记为 $\sigma(H(x))$、$^{\uparrow}\pi(H(x))$，则

$$\sigma\left(H(x)\right) =^{\leq} \sqrt{\pi\left(H(x)\right)} \qquad (5)$$

$$^{\uparrow}\pi\left(H(x)\right) =^{\leq} \sqrt{2\pi\left(H(x)\right)\ln\ln x} \qquad (6)$$

证明　证明过程与自然数素数个数的均方差 $\sigma(x) =^{\leq} \sqrt{\pi(x)}$ 及重对数边界 $^{\uparrow}\pi(x) =^{\leq} \sqrt{2\pi(x)\ln\ln x}$ 相同，此略。自然数是 $H(x) = x$ 的特例，故将 x 用 $H(x)$ 代替，就得 $\sigma\left(H(x)\right)$、$^{\uparrow}\pi\left(H(x)\right)$ 的表达式

4.1.3 多元一维函数的素数个数

定理 3　当 $t_i \leq N_i$　$(1 \leq i \leq m)$ 时，含有 m 个变量表为 $H\left(t_{1:m}\right)$ 的正整值或取整函数中的 素数个数，记为 $\pi\left(H\left(N_{1:m}\right)\right)$，则

$$\pi\left(H\left(N_{1:m}\right)\right) = {}^{\pm}C\int^{N_1}\frac{dt_1}{\ln H\left(t_{1:m}\right)}\int^{N_2}\frac{dt_2}{\ln H\left(t_{1:m}\right)}\cdots\cdots\int^{N_m}\frac{dt_m}{\ln H\left(t_{1:m}\right)} \quad (1 \leq i \leq m) \qquad (7)$$

其中　$^{\pm}C$ 称为素数率系数，当 $H\left(t_{1:m}\right)$ 是等几函数时，　$^{\pm}C =^{1} 1$，否则　$^{\pm}\overline{C} > 1$

证明　与前面方法类似，此略

4.1.4 一元多维函数的素数个数

定理 4　当 $t \leq N$ 时，整数 k 维函数组 $\left\{H_1(t), \cdots\cdots, H_K(t)\right\}$，同时是素数的素数组的组数，记为 $\pi\left(H_{1:K}(N)\right)$，则

$$\pi\left(H_{1:K}(N)\right) =^{\pm} C\int^{N}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\ln H_i(t)}dt \qquad (8)$$

其中　$^{\pm}C$,称为相关系数，当函数 $H_i(t)$ 均是等几函数时 $^{\pm}C =^{1} 1$，否则　$^{\pm}\overline{C} > 1$

证明　$H_i(t)$ 的素数概率，记为 $P\left(H_i(t)\right)$，则

$$P\left(H_i(t)\right) = \frac{^{\pm}C_i}{\ln H_i(t)}$$

$H_i(t)$ 同时是素数的概率，记为 $P\left(H_{1:K}(t)\right)$，设它们的相关系数是常数 B，则

$$P\left(H_{1:K}\left(t\right)\right)=B\prod_{J=1}^{K}P\left(H_i\left(t\right)\right)=B\prod_{J=1}^{K}\frac{{}^{\pm}C_i}{\ln H_i\left(t\right)}=\prod_{J=1}^{K}\frac{{}^{\pm}C}{\ln H_i\left(t\right)}$$

$$\pi\left(H_{1:K}\left(N\right)\right)=\int^{N}\prod_{i=1}^{k}P\left(H_{1:K}\left(t\right)\right)dt\ =^{\pm}C\int^{N}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\ln H_i\left(t\right)}dt$$

${}^{\pm}C$ 值的定性确定，与前面相似，此略，证毕

4. 1.5 多元多维函数的素数个数

定理 5 当 $t_i\le N_i$ $\left(1\le i\le m\right)$ 时，表为 $\left\{H_1\left(t_{1:m}\right),\cdots\cdots,H_K\left(t_{1:m}\right)\right\}$ 或 $\left\{H_{1:K}\left(t_{1:m}\right)\right\}$ 的整数 m 元 k 维函数组 $\left\{H_{1:K}\left(t_{1:m}\right)\right\}$ 中，$t_{1:m}$ 同时是素数的素数组 $\left\{H_{1:K}\left(p_{1:m}\right)\right\}$ 的组数，记为 $\pi\left(H_{1:k}\left(N_{1:m}\right)\right)$，则

$$\pi\left(H_{1:k}\left(N_{1:m}\right)\right)=^{\pm}C\int^{N_1}dt_1\cdots\cdots\int^{N_{m-1}}dt_{m-1}\int^{N_m}\prod_{J=1}^{K}\frac{1}{\ln H_J\left(t_{1:m}\right)}dt_m \tag{9}$$

其中 ${}^{\pm}C$ 称为素率相关系数，当函数 $H_i\left(t\right)$，相互独立，即是均分函数时 ${}^{\pm}C=^{1}1$，否则 ${}^{\pm}\overline{C}>1$

证明 将前两个定理的证明过程组合，即可得到本定理的证明

4. 1.6 多幂函数的素数个数

由素数率定理可知，在函数中素数的分布，仅与函数的阶有关，在多项式函数和幂函数中几乎相同，故可将它们同时分析如下

定义 2 由下面幂指数形式组成的多项式函数，简称为多幂函数

$$H\left(A_s,B_s,x\right)=A+\sum_{i=1}^{s}A_i\ x^{B_i}\qquad\left(0\le A_i\ ,\ B_i<B_{i+1}\right) \tag{10}$$

定理 6 当 A_i 中有无理数或 B_i 中，有非整数时，表为正整数或取整函数形式

$$H\left(A_s,B_s,x\right)=A+\left[\sum_{i=1}^{s}A_i\ x^{B_i}\right]\quad\left(0\le A_i\ ,\ B_i<B_{i+1}\right) \tag{11}$$

无公因子的多幂函数 $H\left(A_s,B_s,x\right)$ 是均分函数，$x\le N$ 时，$H\left(A_s,B_s,x\right)$ 中素数个数可表为 $\pi\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)$、$\Pi\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)$ 等，则

$$\Pi\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)=\frac{{}^{\pm}CN\left(1+O\left(N\ln^{-2}N\right)\right)}{B_s\ln N+\ln A_s-B_s}\qquad\left(A_s\neq 1\right)\qquad(12)$$

$$\Pi\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)=\frac{{}^{\pm}C\pi\left(N\right)}{B_s}\left(1+O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right)\right)\qquad\left(A_s=1\right)\qquad(13)$$

当$H\left(A_s,B_s,x\right)$是均分函数时　${}^{\pm}C={}^{1}$，否则　${}^{\pm}\overline{C}>1$

证明　由均分函数的定义显然可证，满足定理所述条件的函数$H\left(A_s,B_s,x\right)$是均分函数(下同)，由$\int^{x}\left(c_1\ln t+c_0\right)^{-1}t^m dt$的一级熊氏积分（见后面“熊氏积分”一章）$(5.2.2)$至$(5.2.4)$等

$$F\left(x\right)=\int_{}^{x}\frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J t}=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J t}+\frac{x^{m+1}}{c_1\left(m+1\right)^2\ln^3 x}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^4 x}\right)\quad(14)$$

其中　$a_1=\left(m+1\right)c_1$，　$a_0=\left(m+1\right)c_0-c_1$　，得

$$P\left(H\left(A_s,B_s,x\right)\right)=\frac{{}^{\pm}C}{\ln H\left(A_s,B_s,x\right)}={}^{\pm}C\ln^{-1}\left(\sum_{i=0}^{s}A_i\,x^{B_i}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C}{B_s\ln x+\ln A_s}\qquad(15)$$

$$\Pi\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)=\int^{N}P\left(H\left(A_s,B_s,x\right)\right)dx=\int^{N}\frac{{}^{\pm}Cdx}{B_s\ln x+\ln A_s}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{{}^{\pm}CN}{B_s\ln N+\ln A_s-B_s}\left(1+O\left(\dfrac{N}{\ln^2 N}\right)\right) & \left(A_s\neq 1\right)\\[2ex] \displaystyle\int^{N}\frac{{}^{\pm}Cdx}{B_s\ln x+\ln 1}=\int^{N}\frac{{}^{\pm}Cdx}{B_s\ln x}=\frac{{}^{\pm}C\,li\left(N\right)}{B_s} & \left(A_s=1\right)\end{cases}$$

举例如下

令

$$\Pi_0\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)=\Pi_0\left(A+\left[\sum_{i=1}^{s}A_i\,N^{B_i}\right]\right)=\frac{N}{B_s\ln N+\ln A_s-B_s}$$

$$2\overline{\Pi}_0\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)=\Pi_0\left(\left[\sum_{i=1}^{s}A_i\ N^{B_i}\right]\right)+\Pi_0\left(A+\left[\sum_{i=1}^{s}A_i\ N^{B_i}\right]\right)$$

$$=\frac{2N}{B_s\ \ln N+\ln A_s-B_s}$$

$$2\overline{\pi}\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)=\pi\left(\left[\sum_{i=1}^{s}A_i\ N^{B_i}\right]\right)+\pi\left(A+\left[\sum_{i=1}^{s}A_i\ N^{B_i}\right]\right)$$

$$^{1}1=\frac{\overline{\pi}\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)}{\overline{\Pi}_0\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)}$$

例 1　函数 $H\left(A_s,B_s,x\right)=0.5\pm0.5+\left[\sqrt{2}\ x\right]$　　$\left(x\le N\right)$ 中的素数定理数据表如表 4.1

表 4.1

N	$\pi\left(\left[\sqrt{2}\,N\right]\right)$	$\pi\left(\left[1+\sqrt{2}\,N\right]\right)$	$\overline{\pi}\left(\left[\sqrt{2}\,N\right]\right)$	$\overline{\Pi}_0\left(\left[\sqrt{2}\,N\right]\right)$	$^{1}1$
10^3	158	157	157.5	160．0	0.985
10^4	1178	1183	1180.5	1168.6	1.010
10^5	9246	9313	9277.5	9208.5	1.0075
10^6	76519	76279	76399	95976	1.0056

其中　：$\overline{\Pi}_0\left(\left[\sqrt{2}\,N\right]\right)=\frac{N}{B_s\ \ln N+\ln A_s-B_s}=\frac{N}{\ln N+\ln\sqrt{2}-1}$

例 2　函数 $H\left(A_s,B_s,x\right)=0.5\pm0.5+\left[e\,x\right]$　　$\left(x\le N\right)$ 中的素数定理数据表表如表 4.2

表 4.2

N	$\pi\left(\left[eN\right]\right)$	$\pi\left(\left[eN\right]+1\right)$	$\overline{\pi}\left(\left[eN\right]\right)$	$\overline{\Pi}_0\left(\left[eN\right]\right)$	$^{1}1$
10^3	144	153	148.5	144.8	1.025
10^4	1107	1086	1096.5	1085.8	1.010
10^5	8791	8750	8770.5	8685.9	1.0097
10^6	72735	72717	72726	72382	1.0048

其中　$\overline{\Pi}_0\left(\left[eN\right]\right)=\frac{N}{B_s\ \ln N+\ln A_s-B_s}=\frac{N}{\ln N+\ln e-1}=\frac{N}{\ln N}$

例 3　函数 $H\left(A_s,B_s,x\right)=0.5\pm0.5+\left[\pi\,x\right]$　　$\left(x\le N\right)$ 中的素数定理数据表如表 4.3

表 4.3

N	$\pi([\pi N])$	$\pi(1+[\pi N])$	$\bar{\pi}([\pi N])$	$\overline{\Pi}_0([\pi N])$	$^1 1$
10^3	137	154	145.5	141.8	1.026
10^4	1092	1096	1094	1069	1.023
10^5	8750	8602	8676	8578	1.0114
10^6	72200	72326	72263	71632	1.0088

其中 $\overline{\Pi}_0([\pi N]) = \dfrac{N}{B_s \ln N + \ln A_s - B_s} = \dfrac{N}{\ln N + \ln \pi - 1}$

例 4　函数 $H(A_s, B_s, x) = 0.5 \pm 0.5 + [x^{1.125}]$　$(x \le N)$ 中的素数定理数据表如表 4.4

表 4.4

N	$\pi([N^{1.125}])$	$\pi([1+N^{1.125}])$	$\bar{\pi}([N^{1.125}])$	$\overline{\Pi}_0([N^{1.125}])$	$^1 1$
10^3	148	146	147	158	0.930
10^4	1130	1072	1101	1107.6	1.006
10^5	8649	8492	8570.5	8560	1.0012
10^6	69608	69733	69671	69892	0.9968

其中 $\overline{\Pi}_0([N^{1.125}]) = \dfrac{li(N)}{1.125}$

例5　函数 $H(A_s, B_s, x) = 0.5 \pm 0.5 + [x^{1.25}]$　$(x \le N)$ 中的素数定理数据表如表 4.5

表 4.5

N	$\pi([N^{1.25}])$	$\pi([1+N^{1.25}])$	$\bar{\pi}([N^{1.25}])$	$\overline{\Pi}([N^{1.25}])_0$	$^1 1$
10^3	163	142	152.5	142.4	1.071
10^4	995	1029	1012	996.8	1.015
10^5	7688	7782	7735	7704	1.004
10^6	62628	63458	63043	62902	1.0022

其中 $\overline{\Pi}([N^{1.25}])_0 = \dfrac{li(N)}{1.25}$

例6　函数 $H(A_s, B_s, x) = 0.5 \pm 0.5 + [x^{1.4}]$　$(x \le N)$ 中的素数定理数据表如表 4.6

表 4.6

N	$\pi([N^{1.4}])$	$\pi([1+N^{1.4}])$	$\bar{\pi}([N^{1.4}])$	$\overline{\Pi}([N^{1.4}])_0$	$^1 1$
10^3	127	148	137.5	127.1	1.081
10^4	888	887	887.5	890	0.997

10^5	6867	6980	6923.5	6878.6	1.0065
10^6	56441	56057	56249	95976	1.0015

其中 $\overline{\Pi}\left(\left[N^{1.4}\right]\right)_0=\dfrac{li(N)}{1.4}$

由于用$\overline{\Pi}_0\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)$代替理论值$\Pi\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)$时，省略一个正的量，理论值被减少的阶为$\left(1+O\left(\dfrac{N}{\ln^2 N}\right)\right)$，故 N 较大后，实际值与所用的理论代替值$\overline{\Pi}_0\left(H\left(A_s,B_s,N\right)\right)$之比，平均而言是一个大于 1 的渐近函数，表中数据支持理论结论

4. 1.7 t^2+1中的素数个数

定理 7 当$t\le n$时，形如t^2+1的素数理论平均个数，记为$\pi\left(n^2+1\right)$， 则

$$\pi\left(n^2+1\right)={}^{\pm}0.5C\,\pi(n) \tag{16}$$

${}^{\pm}C$ 是素率系数

证明 理论上可以判断t^2+1是非等几函数，因为$a=2$时，下式

$$t^2+1-a=(t+1)(t-1)$$

恒为合数，则

$$\pi\left(n^2+1\right)={}^{1}\Pi\left(n^2+1\right)={}^{1}\int^{n}P\left(t^2+1\right)dt=\int^{n}\frac{{}^{\pm}Cdt}{\ln\left(t^2+1\right)}=\int^{n}\frac{{}^{\pm}Cdt}{2\ln t}=\frac{{}^{\pm}C\,\pi(n)}{2}$$

得(16)，证毕。数据见下表如表 4.7

表 4.7 t^2+1函数素数数据表[2] P67

n	$\pi\left(n^2+1\right)$	$\pi(n)$	${}^{\pm}C$
10	5	4	2.5
100	20	25	1.6
1000	113	168	1.35
10000	842	1229	1.370
100000	6656	9592	1.388
180000	11223	16342	1.374

其中 $\quad {}^{\pm}C=\dfrac{2\pi\left(n^2+1\right)}{\pi(n)}$

4. 1.8 n^2 到 $(n+1)^2$ 之间的素数个数

定理 8 n^2 到 $(n+1)^2$ 之间的实际素数个数及素数理论平均个数，记为 $\pi\left(n^2,(n+1)^2\right)$ 则[2] P67

$$\pi\left(n^2,(n+1)^2\right)={}^{\pm}C\frac{n}{\ln n} \tag{17}$$

$$ {}^{\pm}C=\pi\left(n^2,(n+1)^2\right)\frac{\ln n}{n} \tag{18}$$

其中 ${}^{\pm}C$ 是素率系数

证明 因 $a=1$ 时

$$n^2-a=(n+1)(n-1)$$

恒为合数，函数 n^2 是非均分函数，以此为条件 “n^2 到 $(n+1)^2$ 之间的素数个数”，是广义非均分条件问题，故

$$\pi\left(n^2,(n+1)^2\right)=\pi\left((n+1)^2\right)-\pi\left(n^2\right)={}^{1}\Pi\left(n^2,(n+1)^2\right)$$

$$=\int_{n^2}^{(n+1)^2}{}^{\pm}CP(t)\,dt=\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{{}^{\pm}Cdt}{\ln t}=\frac{{}^{\pm}C\left((n+1)^2-n^2\right)}{\ln(n+0.5)^2}=\frac{{}^{\pm}Cn}{\ln n}$$

得本定理结果

4. 2 整数变量指数函数的素数个数

定理 9 b,c,d 中，至少有一个不是整数，且 a 与 b 互素，p 是素数，由均分函数定义，可证明表为以下形式的指数素数变量取整函数

$$H(a,b,c,d,p)=\left[a+bc^{d\,p}\right] \tag{19}$$

是均分函数，否则不能直接确定函数 $H(a,b,c,d,p)$ 均分与否

当

$$H(a,b,c,d,p)=\left[a+bc^{d\,p}\right]\le\left[a+bc^{d\,p_{\max}}\right]={}^{1}N \tag{20}$$

时的最大素数记为$p_{\max}$，即

$$p \le p_{\max} = \frac{{}^{1}1}{d \ln C} \ln \frac{N}{b} \tag{21}$$

$H(a,b,c,d,p)$中的素数个数，记为$\pi(H(a,b,c,d,p) \le N)$或$\pi_e(N)$，则

$$\pi_e(N) = \pi(H(a,b,c,d,p) \le N) = {}^{\pm}C(A)\left(A + \frac{\ln\ln N}{d \ln c}\right) \tag{22}$$

$$\pi_e(N) = \pi(H(a,b,c,d,p) \le N) = {}^{\pm}C(B)\left(B + \frac{\ln p_{\max}}{d \ln c}\right) \tag{23}$$

当$H(a,b,c,d,p)$,是均分函数时，${}^{\pm}C(A) = {}^{1}1$；否则$ ${}^{\pm}\overline{C}(A) > 1$

证明　将(1)代入(1.1)得

$$\pi_e(N) = \sum_{p \le N}\{\pi(H(a,b,c,d,p)) - \pi(H(a,b,c,d,p)-1)\}$$

$$= \sum_{t \le 1}^{N}\{\pi(t) - \pi(t-1)\}\{\pi(H(a,b,c,d,t)) - \pi(H(a,b,c,d,t)-1)\}$$

$$=^{1}\int^{N} p(t)\, p(H(a,b,c,d,t))\, dt = \int^{N} \frac{1}{\ln t} \frac{{}^{\pm}Cdt}{\ln H(a,b,c,d,t)} = \int^{N} \frac{1}{\ln t} \frac{{}^{\pm}Cdt}{\ln(a + bc^{dt})}$$

$$= \int^{N} \frac{{}^{\pm}Cdt}{(t \ln t)\, d \ln c} = \frac{{}^{\pm}C \ln\ln N}{d \ln c} + a$$

由上式得(4)，(3)代入(4)得(5)，证毕

由此定理可获得以下若干推理

4. 2.1 Mersenns 素数个数

推理 183 表为

$$h_e(t) = 2^t - 1 \tag{24}$$

或

$$M(p) = 2^{2^p} - 1 \tag{25}$$

形式的 Mersenns 素数是非均分函数，在$h_e(t) = 2^t - 1 = 2^{2^p} - 1 \le N$时，且$(1, N)$内的最

大 Mersenns 素数记为 $M(Q)=2^{2^Q}-1$，Mersenns 素数的个数记为 $\pi_e(N)$，$\pi_M(Q)$，则

$$\pi_e(N) =^1 \pi_M(Q) = {}^{\pm}A(a)\left(a+\frac{\ln\ln N}{\ln 2}\right) \tag{26}$$

$$= {}^{\pm}B(b)\left(b+\frac{\ln Q}{\ln 2}\right) = c + {}^{\pm}C(c)\ln Q \tag{27}$$

证明　因 $h_e(t)-1=2^t-2$ 恒为合数。故 Mersenns 素数是非均分函数.

当 2^t-1 是素数时，t 必是 2 的素数 p 次方：2^p，理论计算时，素数公理认为 2^t-1 出现素数时，素数在对应的 t 值中是均匀分布的，故 Mersenns 素数的个数，属于“一般指数函数的素数个数”,即

$$H(a,b,c,d,p)=\left[a+bc^{dp}\right]=-1+2^t$$

由 (22)、(23) 得 (26)、(27)

下面的重一素数、回文素数等均属此情况

实际数据见表 4.8，用 $h_e(t)=2^t-2$ 表达 Mersenns 素数数值太大，表中用 $M(Q)=2^{2^Q}-1$ 的方式表达 Q 及 $\pi_M(Q)$ 等

表 4.8　Mersenns 素数数据表

$\pi_M(Q)$	Q	${}^{\pm}C(c)$	$\pi_M(Q)$	Q	${}^{\pm}C(c)$
1	2	2.572	25	21701	2.580
2	3	2.492	26	23209	2.665
3	5	2.284	27	44497	2.594
4	7	2.424	28	86243	2.530
5	13	2.204	29	110503	2.563
6	17	2.365	30	132049	2.610
7	19	2.643	31	216091	2.586
8	31	2.549	32	756839	2.417
9	61	2.359	33	859433	2.469
10	89	2.385	34	1257787	2.473
11	107	2.513	35	1398269	2.526
12	127	2.638	36	2976221	2.464
13	521	2.181	37	3021377	2.530
14	607	2.290	38	6972593	2.458
15	1279	2.187	39	13466917	2.419
16	2203	2.162	40	20996011	2.373
17	2281	2.286	41	24036583	2.395
18	3217	2.314	42	25964951	2.443
19	4253	2.358	43	30402457	2.478
20	4423	2.470	44	32582657	
21	9689	2.364	45	43112609	

22	9941	2.470	46	37156667	
23	11213	2.547			
24	19937	2.499			

$$^{\pm}C(c)=\frac{\pi_e(N)-c}{\ln Q}$$

$$\overline{^{\pm}C}(c)={}^{\pm}2.4457\ ,\quad c=0.296\ ,\quad 2.162\le{}^{\pm}C(c)\le 2.665$$

$$^{\pm}\overline{B}(b)={}^{\pm}C(c)\ln 2=1.6952,\ b=\frac{c}{^{\pm}B(b)}=0.175\ ,\quad 1.499\le{}^{\pm}B(b)\le 1.847$$

4. 2.2 重一素数个数

感谢 东陆论坛网友 crank 提供本问题网址：http://www.h4.dion.ne.jp/~rep/

定义 3 n 个 1 构成的数：$\overbrace{1\cdots\cdots1}^{n}=\frac{10^n-1}{9}$，称为 n 位重一数 (Repunit numbers)，当它是素数时，称为重一素数[8]P62 .

可以证明(略) 重一素数的 n 必须是可表为 p 的素数，可将重一数 表为$h_1(n)$

推理 2 $n\le N$ 的重一素数$h_1(n)$的个数，记为$\pi\left(h_1(N)\right)$，则

$$\pi\left(h_1(N)\right)\overset{1}{=}\pi_M(Q)={}^{\pm}A(a)\left(a+\frac{\ln\ln N}{\ln 10}\right)$$

$$={}^{\pm}B(b)\left(b+\frac{\ln Q}{\ln 10}\right)=c+{}^{\pm}C(c)\ln Q \qquad (28)$$

证明 与“Mersenns 素数个数”的证明相似，此略（下同）

实际数据见表 4.9，已知以下 7 个重一素数。并预测表为$\overline{p_8}$的第 8 个重一素数的可能性较大的值及分布范围

表 4.9 重一素数表

$\pi_M(Q)$	Q	$^{\pm}C(1.46)$
1	2	0.464
2	11	0.518
3	23	0.653
4	317	0.554
5	1031	0.595
6	49081	0.489
7	86453	0.546

见网站 http://www.h4.dion.ne.jp/~rep/

$$^{\pm}\overline{C}(1.46)=0.5457 \quad , \quad 0.464\le {}^{\pm}C(1.46)\le 0.653$$

$$8=c+{}^{\pm}\overline{C}(c)\ln \overline{p}_8$$

$$p_8={}^{\pm}\exp\left(\frac{8-c}{{}^{\pm}\overline{C}(c)}\right)={}^{\pm}\exp\left(\frac{8-1.46}{{}^{\pm}\overline{C}(1.46)}\right)={}^{\pm}\exp\left(\frac{8-1.46}{0.5457}\right)={}^{\pm}160269$$

$$\overline{p}_8=\exp\left(\frac{8-1.46}{{}^{\pm}\overline{C}(1.46)}\right)=160128$$

$$22366=\left(\frac{8-1.46}{0.653}\right)<\{[p_8]\}<\exp\left(\frac{8-1.46}{0.464}\right)=1322226$$

下面用符号$\{[p_8]\}$表示 p_8 可能性较大的分布范围:

因$86453=p_7<p_8$，故 p_8 的值以160128为分布中心，分布在以下范围的可能性较大

$$86457\le\{[p_8]\}\le 1322226$$

4. 2.3 斐波那契素数个数

引理 1 若 $F_1=a$，$F_2=b$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ ，则

$$F_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{29}$$

$$A=\frac{2b+\left(\sqrt{5}-1\right)a}{5+\sqrt{5}} \quad , \quad B=\frac{2b-\left(\sqrt{5}+1\right)a}{5-\sqrt{5}} \tag{30}$$

证明 略（感谢东陆论坛的网友 crank 提供此引理中的通项表达式 http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=1817&Forum_ID=9）

定义 4 斐波那契(Fibonacci)数列可表为

$$F_1=F_2=1,\ F_{u+2}=F_{u+1}+F_u \tag{31}$$

$$F_u(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{32}$$

或

$$F_1=1,\ F_2=3,\ F_{v+2}=F_{v+1}+F_v \tag{33}$$

$$F_v(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{34}$$

当F_u 或F_v 是素数时，称它们为斐波那契素数

定理 10 $u\le N$ 或 $v\le N$ 时，斐波那契素数个数表为$\pi(F_u(n)),\Pi(F_u(n))$，或$\pi(F_v(n)),\Pi(F_v(n))$，则

$$\pi(F_u(n))=^1\Pi(F_u(n))=^{\pm}C_u(c_u)\ln u-c_u \tag{35}$$

$$\pi(F_v(n))=^1\Pi(F_v(n))=^{\pm}C_v(c_v)\ln u-c_v \tag{36}$$

证明 略，数据见表 4.10 ，4.11

表 4.10 斐波那契 $F_u(n)$ 素数数据表[2]P17

$\pi(F_u(n))$	n	$^{\pm}C_u(c_u)$	$\pi(F_u(n))$	n	$^{\pm}C_u(c_u)$
1	3	3.46	8	23	3.44
2	4	3.46	9	29	3.50
3	5	3.60	10	43	3.40
4	7	3.50	11	47	3.58
5	11	3.25	12	83	3.35
6	13	3.43	13	94	3.48
7	17	3.46			

$c_u=2.80$ ，$^{\pm}\overline{C}_u(c_u)=3.455$， $3.25\le{}^{\pm}C_u(c_u)\le3.60$

表 4.11 斐波那契 $F_v(n)$ 素数数据表[2]P17

$\pi(F_v(n))$	n	$^{\pm}C_v(c_v)$	$\pi(F_v(n))$	n	$^{\pm}C_v(c_v)$
1	2	8.37	10	19	5.03
2	4	4.91	11	31	4.60
3	5	4.85	12	37	4.65
4	7	4.52	13	41	4.79
5	8	4.71	14	47	4.88
6	11	4.50	15	53	4.99
7	13	4.60	16	61	5.06
8	16	4.62	17	71	5.11
9	17	4.87	18	79	5.22

$c_v=4.80$ ，$^{\pm}\overline{C}_v(c_v)=4.90$， $4.50\le{}^{\pm}C_v(c_v)\le8.37$

4. 2.4 费马素数定理

定理 11 形如 $2^{2^n}+1$ 的费马(Farmat)素数仅有限个

证明　因形如$H(n)=2^{2^n}+1$的费马素数，满足条件(4)式，使本推理获证，并支持了人们长期未找到第六个费马素数而提出的猜想[8]P61：仅$n\in(0,1,2,3,4)$时，$H(n)$是素数

东陆论坛名为635207720的网友对函数$f(t)$提出如下素数问题

（http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23706&Forum_ID=10）

$H(t)=9901$ 1 是素数

$H(t)=99990001$ 是素数

$H(t)=999999000001$ 是素数

$H(t)=9999999900000001$ =是素数吗？

即判断函数$H(t)=(10^{2t}-1)10^{2t}+1$的素数问题，显然属于指数函数的素数问题，由（3）式或（12）式知：这类素数有无限多个

4.3　素数变量函数求和问题

4. 3.1 素数变量函数中素数个数及定性判断

定理 12　当素数变量 p 在(2，N)内取值时，素数变量函数$H(p)$ 中出现素数个数的实际值及理论值，记为$\pi(H(p\le N))$ 、$\Pi(H(p\le N))$，则

1）

$$\pi(H(p\le N))=^{1}\Pi(H(p\le N))=\int^{N}\frac{^{\pm}C}{\ln H(t)}\frac{dt}{\ln t} \qquad (37)$$

2）　若$\lim\limits_{N\to\infty}\pi(H(p\le N))\to\infty$，则

$$H(p)\le Aexp(Bp\ln\ln p) \qquad (38)$$

3）　若$\lim\limits_{N\to\infty}\pi(H(p\le N))\le k$，则

$$H(p)\ge Aexp(Bp\ln\ln^{1+\varepsilon}p) \qquad (39)$$

其中

1、A、B 是常数

2、当 $H(p)$ 是均分函数时，$^{\pm}C = {}^{1}1$；否则 $^{\pm}\overline{C} > 1$，

3、上面定性判断两个条件还可略作改进，此略

证明　1）　显然

$$\pi\left(H\left(p\le N\right)\right) = \sum_{p\le N}\left[\pi(y)\Big|^{y=H(p)} - \pi(y-1)\Big|^{y=H(p)}\right]$$

$$=\sum_{t\le N}\left[\pi(y)\Big|^{y=H(p)} - \pi(y-1)\Big|^{y=H(p)}\right]\left[\pi(t)-\pi(t-1)\right]$$

$$=^{1}\sum_{t\le N}\left[\pi(y)\Big|^{y=H(p)} - \pi(y-1)\Big|^{y=H(p)}\right]\left[\Pi(t)-\Pi(t-1)\right]$$

$$=^{1}\sum_{t\le N}\frac{\partial\Pi(y)}{\partial y}\bigg|^{y=H(t)}\frac{\partial\Pi(t)}{\partial t} =^{1}\sum_{t\le N}P(y)\Big|^{y=H(t)}P(t) =^{1}\sum_{t\le N}P\left(H(t)\right)P(t)$$

$$=^{1}\int^{N}P\left(H(t)\right)P(t)\,dt = \int^{N}\frac{^{\pm}C}{\ln H(t)}\frac{dt}{\ln t}$$

得定理中 $\pi\left(H\left(p\le N\right)\right)$ 的表达式

2）　当 $H(p)\le Aexp\left(Bp\ln\ln p\right)$ 时得

$$\lim_{N\to\infty}\pi\left(H\left(p\le N\right)\right) =^{1}\lim_{N\to\infty}\Pi\left(H\left(p\le N\right)\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{^{\pm}C}{\ln H(t)}\frac{dt}{\ln t}\ge\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{^{\pm}C}{\ln\left[Aexp\left(Bp\ln\ln p\right)\right]}\frac{dt}{\ln t}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{^{\pm}C}{\left[\ln A+Bp\ln\ln p\right]}\frac{dt}{\ln t}=\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{^{\pm}Cdt}{Bt\ln t\ln\ln t}=\lim_{N\to\infty}\frac{^{\pm}C}{B}\ln\ln\ln N\to\infty$$

得(38)

3）　当 $H(p)\ge Aexp\left(Bp\ln\ln^{1+\varepsilon}p\right)$ 时得

$$\lim_{N\to\infty}\pi\left(H\left(p\le N\right)\right) =^{1}\lim_{N\to\infty}\Pi\left(H\left(p\le N\right)\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{C}{\ln H(h)}\frac{dt}{\ln t}\le\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{C}{\ln\left[Aexp\left(Bp\ln\ln^{1+\varepsilon}p\right)\right]}\frac{dt}{\ln t}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{C}{\left[\ln A+Bp\ln\ln^{1+\varepsilon}p\right]}\frac{dt}{\ln t}=\lim_{N\to\infty}\int^{N}\frac{Cdt}{Bt\ln t\ln\ln^{1+\varepsilon}t}=\lim_{N\to\infty}\left(K-\frac{C}{B\ln\ln^{\varepsilon}N}\right)=K$$

得(39)

4. 3.2 素数变量函数中素数个数的均方差及重对数边界估值

定理 13 素数变量函数$H(p)$，在$p\le N$中的素数个数$\pi(H(p\le N))$的均方差、重对数边界，记为$\sigma(\pi(H(p\le N)))$、${}^{\uparrow}\pi(H(p\le N))$，则

$$\sigma(\pi(H(p\le N))) \overset{\le\pm}{=} C\sqrt{\pi(H(p\le N))} \tag{40}$$

$$ {}^{\uparrow}\pi(H(p\le N)) \overset{1}{=} \sqrt{2\ln\ln N}\,\sigma(\pi(H(p\le N))) \tag{41}$$

证明 证明过程与第三章中“数素数个数的均方差及重对数边界的估值”一节的结果

$$\sigma(x) \overset{\le}{=} \sqrt{\pi(x)} \quad , \quad {}^{\uparrow}\pi(x) \overset{\le}{=} \sqrt{2\pi(x)\ln\ln x}$$

相同，过程此略，故用$\pi(H(p\le N))$代替将$\pi(x)$，就得$\sigma(\pi(H(p\le N)))$、${}^{\uparrow}\pi(H(p\le N))$的表达式，考虑到非均分情况在$\sigma(\pi(H(p\le N)))$中增加一个同阶函数${}^{\pm}C$

4. 3.3 素数变量函数值求和及均方差重对数边界估值

定理 14 素数变量函数$H(p)$，在$p\le N$中函数$H(p)$值求和的实际值、 理论值，记为$m(H(p\le N))$ 、$M(H(p\le N))$ ，即

$$m(H(p\le N))=\sum_{p\le N}H(p) \overset{1}{=} M(H(p\le N)) \tag{42}$$

$$M(H(p\le N)) = \int^{N}H(t)P(t)\,dt=\int^{N}\frac{H(t)}{\ln t}dt \tag{43}$$

均方差、重对数边界，记为$\sigma(m(H(p\le N)))$、${}^{\uparrow}m(H(p\le N))$ ，则

$$\sigma(m(H(p\le N))) = {}^{\pm}C\sqrt{m(H(p\le N))} = {}^{\pm}C\sqrt{\int^{N}\frac{H(t)}{\ln t}dt} \tag{44}$$

$$m(H(p\le N)) = {}^{\pm}C\sqrt{2\ln\ln N}\,\sigma(m(H(p\le N))) \tag{45}$$

$$m\left(H\left(p\le N\right)\ \right)\ =M\left(H\left(p\le N\right)\ \right)\ \pm\ m\left(H\left(p\le N\right)\ \right) \tag{46}$$

其中　　当$H\left(p\right)$是均分函数时，${}^{\pm}C={}^{1}1$；否则${}^{\pm}\overline{C}>1$

证明

$$m\left(H\left(p\le N\right)\ \right)=\sum_{p\le N}H\left(p\right)=\sum_{t\le N}H\left(p\right)\left[\pi\left(t\right)-\pi\left(t-1\right)\right]={}^{1}\sum_{t\le N}H\left(p\right)\left[\Pi\left(t\right)-\Pi\left(t-1\right)\right]$$

$$={}^{1}\sum_{t\le N}H\left(p\right)\frac{\partial\Pi\left(t\right)}{\partial t}={}^{1}\sum_{t\le N}H\left(p\right)P\left(t\right)={}^{1}\int^{N}H\left(p\right)P\left(t\right)dt={}^{1}\int^{N}H\left(p\right)\frac{dt}{\ln t}$$

$\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\ \right)$、$m\left(H\left(p\le N\right)\right)$ 的证明过程，与第三章中“数素数个数的均方差及重对数边界的估值”一节的结果

$$\sigma\left(x\right)={}^{\le}\sqrt{\pi\left(x\right)}\quad,\qquad \pi\left(x\right)={}^{\le}\sqrt{2\pi\left(x\right)\ln\ln x}$$

相同，过程此略，故用$m\left(H\left(p\le N\right)\ \right)$代替将$\pi\left(x\right)$，就得$\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\ \right)$、$m\left(H\left(p\le N\right)\ \right)$ 的表达式，考虑到非均分情况$\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\ \right)$中增加一个同阶函数${}^{\pm}C$即可

4. 3.4 素数变量函数值求和的均方差及边界

将“自然数素数大小均方差及重对数边界”中的原理，在素数变量函数中推广如下：

定理 15 以素数实际值p_i、理论值P_i为变量的函数值，分别记为$H\left(p_i\right)$、$H\left(P_i\right)$，因理论值$H\left(P_i\right)$是实际值$H\left(p_i\right)$的最可机值，实际值$H\left(p_i\right)$将以理论值$H\left(P_i\right)$为对称中心，几乎均匀地分布在它的两侧，两者的差值记为$\psi\left(H\left(p_i\right)\right)$，即

$$\psi\left(H\left(p_i\right)\right)=H\left(P_i\right)-H\left(p_i\right) \tag{47}$$

可以将$\psi\left(H\left(p_i\right)\right)$近似看成最可几值为零，对称分布的随机函数

在 p 不大于 N 时，素数变量函数$H\left(p\right)$值求和的实际值及理论值，分别记为$m\left(H\left(p\le N\right)\right)$、$M\left(H\left(p\le N\right)\right)$，求和值$m\left(H\left(p\le N\right)\right)$的均方差、重对数边界，记为$\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)$、$m\left(H\left(p\le N\right)\right)$、$M\left(H\left(p\le N\right)\right)$，则

$$\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)=^1\left[\frac{1}{\pi\left(N\right)}\int^N\frac{t^2H^2\left(t\right)}{\ln t}dt\right]^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

$$m\left(H\left(p\le N\right)\right)=^1 M\left(H\left(p\le N\right)\right)=^1\sqrt{\ln\ln\pi\left(N\right)}\,\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right) \tag{49}$$

证明　在第七章　“K 生素数问题”中“二生素数的正指性”一节里可证明，$\psi\left(H\left(p_i\right)\right)$靠近零值附近区域接近正态分布，靠近最大或最小值附近区域接近指数分布

$$m\left(H\left(p\le N\right)\right)=\sum_{p\le N}H\left(p\right)=\sum_{t\le N}H\left(t\right)\left[\pi\left(t\right)-\pi\left(t-1\right)\right]=^1\sum_{t\le N}H\left(t\right)\left[\Pi\left(t\right)-\Pi\left(t-1\right)\right]$$

$$=^1\sum_{t\le N}H\left(t\right)\frac{\partial\Pi\left(t\right)}{\partial t}=^1\sum_{t\le N}H\left(t\right)P\left(t\right)=^1\int^N H\left(t\right)P\left(t\right)dt=^1\int^N\frac{H\left(t\right)dt}{\ln t}$$

将$m\left(H\left(p\le N\right)\right)$围绕$M\left(H\left(p\le N\right)\right)$的随机波动值记为$\psi\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)$，则

$$\psi\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)=m\left(H\left(p\le N\right)\right)-M\left(H\left(p\le N\right)\right)=\sum_{i=1}^{\pi(N)}\psi\left(H\left(p_i\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left[H\left(P_i\right)-H\left(p_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left[H\left(P_i\right)-H\left(P_i-\xi_i\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi(N)}\sum_{t=P_{i-1}+1}^{P_i}\left[H\left(t\right)-H\left(t-\xi_i\right)\right]\left[\pi\left(t\right)-\pi\left(t-1\right)\right]$$

$$=^1\sum_{i=1}^{\pi(N)}\sum_{t=P_{i-1}+1}^{P_i}\xi_i\frac{\partial H\left(t\right)}{\partial t}\left[\Pi\left(t\right)-\Pi\left(t-1\right)\right]$$

$$=^1\sum_{i=1}^{\pi(N)}\sum_{t=P_{i-1}+1}^{P_i}\xi_i\frac{\partial H\left(t\right)}{\partial t}P\left(t\right)=^1\sum_{i=1}^{\pi(N)}\xi_i\int_{P_{i-1}+1}^{P_i}\frac{\partial H\left(t\right)}{\partial t}\frac{dt}{\ln t}$$

其中：$\xi_i=P_i-p_i$

因P_i是无偏差的理论值，则

$$\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)=\sigma\left(\sum_{p\le N}H\left(p\right)\right)=\sigma\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)-M\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)$$

$$=\sigma\left(\psi\left(m\left(H\left(p\le N\right)\right)\right)\right)=\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left[H\left(P_i\right)-H\left(p_i\right)\right]\right)$$

$$=\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\left[H(P_i)-H(P_i-\xi_i)\right]\right)=\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\xi_i\left.\frac{\partial H(y)}{\partial y}\right|^{y=P_i}\right)$$

$$=\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\xi_i\int_{P_{i-1}}^{P_i}\frac{\partial H(t)}{\partial t}\frac{dt}{\ln t}\right)=^1\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\frac{\sigma(\xi_i)}{\ln P_i}\int_{P_{i-1}}^{P_i}\frac{\partial H(t)}{\partial t}dt\right)$$

$$=^1\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\frac{\sigma(\xi_i)}{\ln P_i}H(P_i)(P_i-p_i)\right)=^1\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\frac{\sigma(\xi_i)}{\ln P_i}H(P_i)\xi_i\right)=^1\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\frac{\sigma^2(\xi_i)}{\ln P_i}H(P_i)\right)$$

由第三章 “自然数中的素数问题”中，“素数大小的均方差及重对数边界的估值”一节 $\sigma(\xi_i)=\sqrt{p_i\ln p_i}$ 的值代入上式得

$$\sigma(m(H(p\le N)))=^1\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}\frac{p_i\ln p_i}{\ln P_i}H(P_i)\right)=^1\sigma\left(\sum_{i=1}^{\pi(N)}p_iH(P_i)\right)$$

$$=^1\left[\frac{1}{\pi(N)}\sum_{i=1}^{\pi(N)}p_i^2H^2(p_i)\right]^{\frac{1}{2}}=^1\left[\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\le N}p^2H^2(p)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=^1\left[\frac{1}{\pi(N)}\int^N t^2H^2(t)P(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}=^1\left[\frac{1}{\pi(N)}\int^N\frac{t^2H^2(t)}{\ln t}dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

得定理中 $\sigma(m(H(p\le N)))$ 的表达式。因 $m(H(p\le N))$ 只进行了 $\pi(N)$ 累加运算，故

$$m(H(p\le N))=\sqrt{2\ln\ln\pi(N)}\;\sigma(m(H(p\le N)))$$

得定理中 $m(H(p\le N))$ 的表达式，证毕

4. 3.5 两个素数积的倒数和

引理 2

$$\int\ln t\,dt=t(\ln t-1)+C \qquad (50)$$

证明　两边求导即可

定理 16　两个素数 p,q $(pq\le x)$ 的积的倒数和，实际值及理论值，分别记为

$m(2,x)$ $\quad M(2,x)$，则

$$m(2,x)=\sum_{p\le x}\frac{1}{pq}={}^{1}M(2,x)=^{\pm}C\ln x\ln\ln x\quad(1=x)\qquad(51)$$

证明 因

$$pq\le x\ ,\quad p\le q\le x/p\qquad\left(2\le p\le\sqrt{x}\right)$$

$$m(2,x)=\sum\frac{1}{pq}=\sum_{2\le p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\sum_{p\le q\le\frac{x}{p}}\frac{1}{q}=^{1}\int_{\pm 2}^{\sqrt{x}}P(t_1)\frac{dt_1}{t_1}\int_{t_1}^{\frac{x}{t_1}}P(t_2)\frac{dt_2}{t_2}$$

$$=^{1}\int_{\pm 2}^{\sqrt{x}}\frac{dt_1}{t_1\ln t_1}\int_{t_1}^{\frac{x}{t_1}}\frac{dt_2}{t_2\ln t_2}=^{1}\int_{\pm 2}^{\sqrt{x}}\left(\ln\ln\frac{x}{t_1}-\ln\ln t_1\right)\frac{dt_1}{t_1\ln t_1}$$

$$=^{1}\int_{\pm 2}^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\frac{\ln x-\ln t_1}{\ln t_1}\right)\right)\frac{d\ln t_1}{\ln t_1}=-^{1}\int_{\pm 2}^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\frac{\ln x-\ln t_1}{\ln t_1}\right)\right)d\left(\frac{\ln x-\ln t_1}{\ln t_1}\right)$$

$$=-^{1}\frac{\ln x-\ln t_1}{\ln t_1}\left(\ln\frac{\ln x-\ln t_1}{\ln t_1}-1\right)\Bigg|_{t_1=^{\pm}2}^{t_1=\sqrt{x}}$$

$$=-^{1}1(\ln 1-1)+^{1}\frac{\ln x-\ln^{\pm}2}{\ln^{\pm}2}\left(\ln\frac{\ln x-\ln^{\pm}2}{\ln^{\pm}2}-1\right)$$

近似计算上式，得本定理的$m(2,x)$的表达式(51)，理论上可以计算 K 个素数倒数和的值，此略

4. 3.6 计算$\prod_{p\le x}\frac{p-a}{p-b}$的值

定理 17

$$\prod_{p\le x}\frac{p-a}{p-b}=\left(\frac{^{\pm}C(a,b)}{\ln x}\right)^{(a-b)}\qquad(52)$$

证明

$$\ln\prod_{p\le x}\frac{p-a}{p-b}=\sum_{p\le x}\ln\frac{p-a}{p-b}=\sum_{p\le x}\ln\frac{p-b-(a-b)}{p-b}$$

$$=\sum_{p\le x}\ln\left(1-\frac{a-b}{p-b}\right)=^{1}\sum_{p\le x}\left(\frac{a-b}{p-b}\right)^{2}-\sum_{p\le x}\frac{a-b}{p-b}=^{1}\sum_{p\le x}\left(\frac{a-b}{p-b}\right)^{2}-\sum_{p\le x}\frac{a-b}{p}\left(1+\frac{b}{p}\right)$$

$$=^{1}\sum_{p\le x}\frac{(a-b)^{2}}{p^{2}}-\sum_{p\le x}\left[\frac{a-b}{p}+\frac{(a-b)b}{p^{2}}\right]=^{1}\sum_{p\le x}\frac{(a-b)(a-2b)}{p^{2}}-\sum_{p\le x}\frac{a-b}{p}$$

$$=^{1}\int^{x}\frac{(a-b)(a-2b)}{t^{2}}P(t)\,dt-\int^{x}\frac{(a-b)}{t}P(t)\,dt=^{1}\int^{x}\frac{(a-b)(a-2b)}{t^{2}\ln t}dt-\int^{x}\frac{(a-b)}{t\ln t}dt$$

$$=-\frac{(a-b)(a-2b)}{x\ln x}-^{1}(a-b)\ln\ln x+c(a,b)=^{1}\ln\left(\frac{C(a,b)}{\ln x}\right)^{(a-b)}$$

整理上式得本定理(52)，证毕

4.4　函数中的回文素数问题

4. 4.1 函数中回文素数的个数及定性判断

定理 18　令 n、N 是不小于 3 的奇数，在 S 进制函数 $f(S,n)$ 及 $f(S,n-1)$ 中，n 及 $n-1$ 位回文数记为 $H(S,n)$ 、$H(S,n-1)$，它们出现素数的实际个数、理论个数及它们之和、整数率分别记为 $m(H(S,n))$ 、$M(H(S,n))$ 、$m(H(S,n-1))$ 、$M(H(S,n-1))$ 、$m(H(S,n,n-1))$ 、$M(H(S,n,n-1))$ 、$I(f(S,n))$ 、$I(f(S,n-1))$，即

$$m(H(S,n,n-1))=m(H(S,n))+m(H(S,n-1))=m(H(S,n))$$
$$(n=2k+1\ge 5) \qquad (53)$$

$$M(H(S,n,n-1))=M(H(S,n))+M(H(S,n-1)) \qquad (54)$$

在 $n\le N$ 时，　它们的个数之和表为 $\pi(H(S,N))$ 、$\Pi(H(S,N))$，即

$$\pi(H(S,N))=\sum_{n=1}^{N}m(H(S,n))=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}m(H(S,2k+1))+m(H(S,2))$$

$$\Pi(H(S,N))=\sum_{n=1}^{N}M(H(S,n)) \qquad (55)$$

则

$$I\left(f\left(S,n\right)\right)=\frac{1}{f'\left(S,n\right)} \tag{56}$$

$$I\left(f\left(S,n-1\right)\right)=\frac{1}{f'\left(S,n-1\right)} \tag{57}$$

$$M\left(H\left(S,n\right)\right)=^{\pm}C\frac{li\left(S^{n}\right)-li\left(S^{n-1}\right)}{S^{\frac{n-1}{2}}f'\left(S,n\right)}=\frac{^{\pm}C}{f'\left(S,n\right)}\left(\frac{S^{\frac{n+1}{2}}}{\ln S^{n}-1}-\frac{S^{\frac{n-1}{2}}}{\ln S^{n-1}-1}\right) \tag{58}$$

$$M\left(H\left(S,n-1\right)\right)=^{\pm}C\frac{li\left(S^{n-1}\right)-li\left(S^{n-2}\right)}{S^{\frac{n-1}{2}}f'\left(S,n-1\right)}$$

$$=\frac{^{\pm}C}{f'\left(S,n-1\right)}\left(\frac{S^{\frac{n-1}{2}}}{\ln S^{n-1}-1}-\frac{S^{\frac{n-3}{2}}}{\ln S^{n-2}-1}\right) \tag{59}$$

$$m\left(H\left(S,n\right)\right)=^{1}M\left(H\left(S,n,n-1\right)\right) \tag{60}$$

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)=\pi\left(H\left(S,N-2\right)\right)+m\left(H\left(S,N\right)\right)=^{1}\Pi\left(H\left(S,N\right)\right) \tag{61}$$

$$\Pi\left(H\left(S,N\right)\right)=\Pi\left(H\left(S,N-2\right)\right)+M\left(H\left(S,N,N-1\right)\right) \tag{62}$$

且：（1） $\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 是无穷大的必要条件是

$$f\left(S,n\right)\leq\frac{^{\leq}CS^{\frac{n+1}{2}}}{\ln^{2}S} \tag{63}$$

（2）$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 是有限值的充分条件是

$$f\left(S,n\right)\geq^{\leq}C\frac{n^{\varepsilon}S^{\frac{n+1}{2}}}{\ln^{2}S} \tag{64}$$

证明　本定理及下面其它函数中回文素数个数的证明，与对应自然数中回文素数个数证明相似，但需在各相关量中，乘上对应的整数率因子 $I\left(H\left(n\right)\right)$ 、$I\left(H\left(n-1\right)\right)$ 等，具体过程略 ， $\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 的定性判断如下：

由于是定性判断，只研究函数中回文素数个数 $\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 的阶，则

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)=^{1}\sum_{n=1}^{N}M\left(H\left(S,n\right)\right)=^{\le}\sum_{n=1}^{N}\frac{^{\pm}C}{f'\left(S,n\right)}\left(\frac{S^{\frac{n+1}{2}}}{\ln S^{n}-1}-\frac{S^{\frac{n-1}{2}}}{\ln S^{n-1}-1}\right)$$

$$=^{\le}\sum_{n=1}^{N}\frac{^{\pm}C}{f'\left(S,t\right)}\frac{S^{\frac{n+1}{2}}}{\ln S^{n}}=^{\le}\int_{1}^{N}\frac{^{\pm}C}{f'\left(S,t\right)}\frac{S^{\frac{t+1}{2}}}{t\ln S}dt=^{\le}\int_{1}^{N}R\left(S,t\right)dt$$

由第一章ξ1.2的定理，显然，当被积函数满足以下条件

1）

$$R\left(S,t\right)=\frac{^{\pm}C}{f'\left(S,t\right)}\frac{S^{\frac{t+1}{2}}}{t\ln S}\ge\frac{^{\pm}C}{t}\qquad(65)$$

$$f'\left(S,t\right)\le C\frac{S^{\frac{t+1}{2}}}{\ln S}$$

$$f\left(S,t\right)\le\int C\frac{S^{\frac{t+1}{2}}}{\ln S}dt\le\frac{^{\le}CS^{\frac{t+1}{2}}}{\ln^{2}S}\qquad(66)$$

时，得

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)=^{\le}\int_{1}^{N}R\left(S,t\right)dt=^{\le}\int_{1}^{N}\frac{dt}{t}=^{\le\pm}C\ln N$$

$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 可能有无穷大，但不是充分条件。在 (14) 中用 t 换 n，得定理中 $f\left(S,n\right)$ 的表达式 (63)

2） 同理当

$$R\left(S,t\right)=\frac{^{\pm}C}{f'\left(S^{t}\right)}\frac{S^{\frac{t+1}{2}}}{\ln S^{t}-1}\le\frac{^{\pm}C}{t^{1+\varepsilon}}$$

$$f\left(S,t\right)\ge\frac{^{\le}C\,t^{\varepsilon}S^{\frac{t+1}{2}}}{\ln^{2}S}\qquad(67)$$

时，得

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)=^{\le}\int_{1}^{N}R\left(S,t\right)dt=^{\le}\int_{1}^{N}\frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}=^{\le}\frac{^{\pm}C}{N^{\varepsilon}}$$

显然此时，$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 的值是有限的，且是充分条件。在 (67) 中，用 t 换 n 得定理中 $f\left(S,n\right)$ 的表达式 (64)

4.4.2 函数中回文素数对的个数及定性判断

定理 19 n、N 是不小于 3 的奇数， 回文素数对只出现在奇位数中，在 S 进制函数 $f(S,n)$ 及 $f(S,n-1)$ 中，奇数 n 及偶数 $n-1$ 位数的回文素数对的个数记为 $m(H_p(S,n))$、$M(H_p(S,n))$、$m(H_p(S,n-1))$、$M(H_p(S,n-1))$、$m(H_p(S,n,n-1))$、$M(H_p(S,n,n-1))$、$I(f(S,n))$、$I(f(S,n-1))$，即

$$m(H_p(S,n,n-1)) = m(H_p(S,n)) + m(H_p(S,n-1))$$

$$M(H_p(S,n,n-1)) = M(H_p(S,n)) + M(H_p(S,n-1))$$

在 $n \le N$ 内回文素数对的 $m(H_p(S,n))$、$M(H_p(S,n,n-1))$ 之和记为 $\pi(H_p(S,N))$、$\Pi(H_p(S,N))$，即

$$\pi(H_p(S,N)) = \sum_{n=1}^{N} m(H_p(S,n)) =^1 \Pi(H_p(S,N))$$

$$\Pi(H_p(S,N)) = \sum_{n=1}^{N} M(H_p(S,n))$$

则

$$I(f(S,n)) = \frac{1}{f'(S,n)} \tag{68}$$

$$I(f(S,n-1)) = \frac{1}{f'(S,n-1)} \tag{69}$$

$$m(H_p(S,n-1)) = 0 \tag{70}$$

$$m(H_p(S,n)) =^1 M(H_p(S,n,n-1)) \tag{71}$$

$$M(H_p(S,n)) = \frac{{}^{\pm}C^2(S-1)^{\frac{n+1}{2}}}{f'(S,n)\ln^2(\mathrm{S}^{n+1} \div 2(S-1))} \tag{72}$$

$$M(H_p(S,n-1)) = \frac{{}^{\pm}C^2(S-1)^{\frac{n-1}{2}}}{f'(S,n-1)\ln^2(\mathrm{S}^{n} \div 2(S-1))} \tag{73}$$

$$M(H_p(S;n,n-1)) = M(H_p(S,n)) + M(H_p(S,n-1)) \tag{74}$$

$$\pi(H_p(S,N)) = \pi(H_p(S,N-2)) + m(H_p(S,N)) \tag{75}$$

$$\Pi(H_p(S,N)) = \Pi(H_p(S,N-2)) + M(H_p(S,N,N-1)) \tag{76}$$

且：（1）　$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 是无穷大的必要条件是

$$f\left(S,n\right) \leq {}^{\leq} C\frac{\mathrm{S}^{\frac{n+1}{2}}}{n\ln^{3}\mathrm{S}^{t}} \tag{77}$$

（2）$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 是有限值的充分条件是

$$f\left(S,n\right) \geq^{\leq} C\frac{n^{\varepsilon}\mathrm{S}^{\frac{n+1}{2}}}{\ln^{2}\mathrm{S}} \tag{78}$$

证明　与对应自然数中回文素数对个数证明相似，仅作 $\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 的定性判断如下

由于是定性判断，只研究函数中回文素数个数 $\pi\left(H_{p}\left(S,N\right)\right)$ 的阶，则

$$\pi\left(H_{p}\left(S,N\right)\right) =^{1} \sum_{n=1}^{N} M\left(H_{p}\left(S,n\right)\right) =^{\leq} \sum_{n=1}^{N} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{n+1}{2}}}{f'\left(S,n\right)\ln^{2}\left(\mathrm{S}^{n+1}\div 2\left(S-1\right)\right)}$$

$$=^{\leq} \sum_{n=1}^{N} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{n+1}{2}}}{f'\left(S,n\right)\ln^{2}\mathrm{S}^{n}} =^{\leq} \int_{1}^{\mathrm{N}} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{t+1}{2}}}{f'\left(S,t\right)t^{2}\ln^{2}\mathrm{S}}dt =^{\leq} \int_{1}^{\mathrm{N}} R\left(S,t\right)dt$$

显然，当被积函数满足以下条件：

（1）

$$R\left(S,t\right) =^{\leq} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{t+1}{2}}}{f'\left(S,t\right)t^{2}\ln^{2}\mathrm{S}} \geq \frac{{}^{\pm}C}{t}$$

$$f'\left(S,t\right) \leq^{\leq} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{t+1}{2}}}{t\ln^{2}\mathrm{S}}$$

$$f\left(S,t\right) \leq \int^{\leq} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{t+1}{2}}}{t\ln^{2}\mathrm{S}}dt \leq^{\leq} C\frac{\mathrm{S}^{(t+1)/2}}{\mathrm{t}\ln^{3}\mathrm{S}^{t}}$$

时，得

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right) =^{\leq} \int_{1}^{N} R\left(S,t\right)dt =^{\leq} \int_{1}^{N}\frac{dt}{t} =^{\leq\pm} C\ln N$$

此时，$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 可能有无穷大，但不是充分条件，用 t 换 n 得定理中 $f\left(S,n\right)$ 的表达式

（2）　同理，当

$$R\left(S,t\right) =^{\leq} \frac{{}^{\pm}C^{2}\left(S-1\right)^{\frac{t+1}{2}}}{f'\left(S,t\right)t^{2}\ln^{2}\mathrm{S}} \leq \frac{{}^{\pm}C}{t^{1+\varepsilon}}$$

$$f\left(S,t\right) \geq {}^{\leq}C\frac{\mathrm{S}^{(t+1)/2}}{\mathrm{t}^{1-\varepsilon}\ln^{3}\mathrm{S}^{t}}$$

时，得

$$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)=^{\leq}\int_{1}^{N}R\left(S,t\right)dt=^{\leq}\int_{1}^{N}\frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}=^{\leq}\frac{^{\pm}C}{N^{\varepsilon}}$$

$\pi\left(H\left(S,N\right)\right)$ 仅有限大，且是充分条件，用 t 换 n 得定理中 $f\left(S,n\right)$ 的表达式，证毕

第 5 章 熊氏积分

本章叙述中，系数等量的代表字符一般通用

5. 1 基本方法

5. 1.1 最小阶方程

一般的分步积分公式，可表为

$$F(x)=\int^{x}u(t)\,dv(t)=u(t)\,v(t)-\int^{x}v(t)\,du(t)$$

对积分原函数 $F(x)$ 不可简单表达的被积函数 $f(t)$ ，进行分步积分

$$F(x)=\int^{x}f(t)\,dt=f(x)\,x-\int^{x}t\,d\,f(t)=f(x)\,x-\int^{x}f'(t)\;d\frac{t^{2}}{2}$$

$$=f(x)\,x-f'(x)\frac{x^{2}}{2}+\int^{x}f^{(2)}(t)\,d\frac{t^{3}}{3!}=\sum_{J=1}^{\infty}f^{(J-1)}(x)\frac{(-x)^{J}}{J!}$$

会因循环积分产生无穷级数，本文对这类积分中的某些函数，采用含待定系数指定函数的方法，使级数快速收敛，获得同级积分中，最接近积分值的函数--最优化积分函数，从而产生一种新的分步积分方法

定义 1 在含待定系数 $a_{r,\,J}$ 的函数 $H\left(x,\,a_{r,\,J}\right)$ 表达式中，用取 x 的阶最小的方式，即取 x 的若干较高阶项的系数为零 ，确定其待定系数 $a_{r,\,J}$ 的值，表为

$$H\left(x,\,a_{r,\,J}\right)\Rightarrow 0 \qquad (1)$$

将上式称为最小阶方程，符号：“$\Rightarrow 0$”，称为最小阶符号。

定理 1 在最小阶方程 $H\left(x,\,a_{r,\,J}\right)\Rightarrow 0$ 的左边，乘以任意非零函数 $L\left(x,\,a_{r,\,J}\right)$，得到新的最小阶方程表为

$$L\left(x,\,a_{r,\,J}\right)H\left(x,\,a_{r,\,J}\right)\Rightarrow 0 \qquad (2)$$

此两个最小阶方程(1) 、(2) 的解相同，可表为

$$H\left(x, a_{r,J}\right) \Rightarrow L\left(x, a_{r,J}\right) H\left(x, a_{r,J}\right) \Rightarrow 0 \tag{3}$$

证明　最小阶方程 $H\left(x, a_{r,J}\right) \Rightarrow 0$ 的定义是指：取函数 $H\left(x, a_{r,J}\right)$ 中，x 的若干较高阶项的系数为零 ，当它左边乘以非零函数 $L\left(x, a_{r,J}\right)$ 时，原来那些等于零的较高阶项的系数仍然为零，原来不为于零的系数仍然不为于零，且各系数的相互比例关系不变，各项 x 的阶之差不变,故两最小阶方程同解

定义 2　含基本函数 $v(t)$ 的复合函数 $u\left[v(t)\right]$，构成积分被积函数 $f\left(u\left[v(t)\right]\right)$，在 t < x 时的积分值，记为 $F(x)$，即

$$F(x) = \int^{x} f\left(u\left[v(t)\right]\right) dt \tag{4}$$

用含有 $k(1)+1$ 个待定系数 $a_{1,J}$，构成的的多项式 $\sum_{J=0}^{k(1)} a_{1,J} v^{J}(x)$，组成取代积分被积函数 $f\left(u\left[v(t)\right]\right)$ 中的 $u\left[v(t)\right]$，　记为

$$u\left[v(t)\right] : \sum_{J=0}^{k(1)} a_{1,J} v^{J}(x) \tag{5}$$

进行近似积分计算，将上式中的 $\sum_{J=0}^{k(1)} a_{1,J} v^{J}(x)$ 称为 $u\left[v(t)\right]$ 的一级取代函数，符号："：" 称为取代函数符。由此得到的积分值，记为 $M_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$，称为一级积分值，其差 $F(x) - M_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$，称为一级剩余积分值，简称一级剩余积分，记为 $F_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$

5. 1.2　一级熊氏积分

定义 3　将 $M_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$ 值与 $F_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$ 的近似积分值之和，称为一级熊氏积分

定理 2　由最小阶方程的定义，及一级熊氏积分定义，可将 $F(x)$ 的一级熊氏积分 $F(x) = \int^{x} f\left(u\left[v(t)\right]\right) dt$ 、$M_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$ 及 $F_{1}\left(x, a_{1,J}\right)$ 表为

$$F(x) = \int^{x} f\left(u\left[v(t)\right]\right) dt = M_{1}\left(x, a_{1.J}\right) \; x + F_{1}\left(x, a_{1.J}\right) \tag{6}$$

$$F(x)=f\left(\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1.J}v^{J}(x)\right)x+\int^{x}f_{1}\left(u_{1}[v(t)]\right)dt \tag{7}$$

则：

$$k(1)=\log_{v(t)}u[v(t)]+1=\frac{\ln u[v(t)]}{\ln v(t)}+1 \tag{8}$$

且$a_{1.J}$、$u_1[v(x)]$及$f_1(u_1[v(x)])$的值，由下面一级最小阶方程确定

$$f_1(u_1[v(x)])=f(u[v(x)])-\frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1.J}\ v^{J}(x)\right)x\right]\Rightarrow 0 \tag{9}$$

其中：将$F_1(x,a_{1,J})$的积分被积函数，记为$f_1(u_1[v(x)])$，即函数$f_1(u_1[v(x)])$由下式决定

$$F_1(x,a_{1,J})=\int^{x}f_1\left(u_1[v(t)]\right)dt$$

证明　在一级取代函数的定义(5)式中，为使$\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1,J}v^{J}(x)$的值最接近$u[v(t)]$在变量t处于上限x处的值，须使$k(1)$的值等于$u[v(t)]$中$v(t)$的最高次幂的次数，可表达成$(8)$式中，以$v(t)$为底$u[v(t)]$的对数形式（前一式），或$u[v(t)]$的对数除以$v(t)$的对数（后一式）

由一级熊氏积分定义，可直接得到(6)式，由一级取代函数(5)式，得

$$M_1(x,a_{1.J})=\int^{x}f\left(u[v(t)]:\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1.J}v^{J}(x)\right)dt$$

$$=\int^{x}f\left(\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1.J}v^{J}(x)\right)dt=f\left(\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1.J}v^{J}(x)\right)x$$

由此得(7)式的前一项，由(5)式得

$$F(x)=\int^{x}f\left(u[v(t)]\right)dt=M_1(x,a_{1.J})+F_1(x,a_{1.J})$$

$$=f\left(\sum_{J=0}^{k(1)}a_{1.J}v^{J}(x)\right)x+F_1(x,a_{1.J})$$

因 $F_1(x, a_{1.J})$ 的积分被积函数记为 $f_1(u_1[v(t)])$，由上式得

$$F_1(x, a_{1.J}) = \int^x f_1(u_1[v(t)])\,dt = \int^x f(u[v(t)])\,dt - M_1(x, a_{1.J})$$

$$= \int^x f(u[v(t)])\,dt - f\left(\sum_{J=0}^{k(1)} a_{1.J} v^J(x)\right)x \qquad (10)$$

在 (7) 式的积分中，为使 $M_1(x, a_{1.J})$ 的值，最逼近 $F(x)$，须使 $F_1(x, a_{1.J})$ 的值最小，即须使 $F_1(x, a_{1.J})$ 对 x 偏导的阶最小，由此对上式 (10) 取 x 的偏导，构成由（9）式表达的一级最小阶方程

显然，$\sum_{J=0}^{k(1)} a_{1,J}\ v^J(x)$ 中 $v(x)$ 的最高幂指数 $k(1)$，须等于 $u[v(x)]$ 中 $v(x)$ 的最高幂指数记为 $e_{\max}$，即

$$k(1) = e_{\max} = \frac{\ln u[v(t)]}{\ln v(t)} + 1$$

只有这样，才能使最小阶方程 (9) 获得最佳解，即能使 $F_1(x, a_{1.J})$ 取得最小阶，得方程 (8)

将 $F_1(x, a_{1.J})$ 以 $v(x)$ 为底，呈升阶排列的多项式，其最高阶记为 $E_{\max}$，则

$$F_1(x, a_{1.J}) = \sum_{I=0}^{E_{\max}} A_I(a_{1.J})\,v^I(x)$$

为使上式中 $F_1(x, a_{1.J})$ 取得最小阶，须让 $k(1)+1$ 个较高阶的系数 $A_I(a_{1.J})$ 等于零

$$\begin{cases} A_{E_{\max}}(a_{1.J}) = D(E_{\max}) = 0 \\ A_{E_{\max}-1}(a_{1.J}) = D(E_{\max}-1) = 0 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ A_{E_{\max}-k(1)}(a_{1.J}) = D(E_{\max}-k(1)) = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \le J \le E_{\max} \\ = k(1)+1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

或简记为

$$A_I(a_{1.J}) = D(E_{\max} - J) = 0 \qquad (0 \le J \le k(1),\ E_{\max} - k(1) \le I \le E_{\max}) \qquad (12)$$

得含 $k(1)+1$ 个待定系数 $a_{1.J}$，共 $k(1)+1$ 个方程的方程组，解此方程组，得 $k(1)+1$ 个

待定系数$a_{1.J}$、$u_1\left[v(x)\right]$及$f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right)$等量的值，从而获得$F(x)$、$M_1\left(x, a_{1.J}\right)$及$F_1\left(x, a_{1.J}\right)$等的表达式

5. 1.3 二级熊氏积分

仿照一级熊氏积分定义二级熊氏积分

定义 4 用二级取代函数

$$u_1\left[v(x)\right]: \sum_{J=0}^{k(2)} a_{2.J} v^J(x) \tag{13}$$

代入一级剩余值$F_1\left(x, a_{1.J}\right)$积分表达式

$$F_1\left(x, a_{1.J}\right) = \int^x f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right) dt \tag{14}$$

中，进行近似积分计算。由此得到的积分值，称为二级积分值，记为$M_2\left(x, a_{2.J}\right)$，其差$F_1\left(x, a_{1.J}\right) - M_2\left(x, a_{2.J}\right)$，简称二级剩余值，记为$F_2\left(x, a_{2.J}\right)$。将$M_2\left(x, a_{2.J}\right)$值与$F_2\left(x, a_{2.J}\right)$的近似积分值之和，称为二级熊氏积分

定理 207　由最小阶方程、二级熊氏积分定义，可将$F(x)$的二级熊氏积分有关量$F_1\left(x, a_{1.J}\right) = \int^x f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right) dt$、$M_2\left(x, a_{2.J}\right)$及$F_2\left(x, a_{2.J}\right)$表为

$$F_1\left(x, a_{1.J}\right) = M_2\left(x, a_{2.J}\right) + F_2\left(x, a_{2.J}\right) \tag{15}$$

$$F_1\left(x, a_{1.J}\right) = f\left(\sum_{J=0}^{k(2)} a_{2.J} v^J(x)\right) x + \int^x f_2\left(u_2\left[v(x)\right]\right) dt \tag{16}$$

其中　$a_{2.J}$、$u_2\left[v(x)\right]$及$f_2\left(u_2\left[v(x)\right]\right)$的值，由下面二级最小阶方程确定

$$f_2\left(u_2\left[v(x)\right]\right) = f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[f_1\left(\sum_{J=0}^{k(2)} a_{2.J} v^J(x)\right) x\right] \Rightarrow 0 \tag{17}$$

其中　$k(2)$的值等于$u_1\left[v(x)\right]$中，$v(x)$的最高幂指数

$$k(2)=\log_{v(t)}u_1\left[v(x)\right]+1=\frac{\ln u_1\left[v(x)\right]}{\ln v(t)}+1 \tag{18}$$

证明　由二级熊氏积分定义，可直接得到(16)，由(14)得

$$M_2(x,a_{2.J})=\int^x f_1\left(u_1[v(t)]:\ \sum_{J=0}^{k(2)}a_{2.J}v^J(x)\right)dt$$

$$=\int^x f\left(\sum_{J=0}^{k(2)}a_{2.J}v^J(x)\right)dt=f\left(\sum_{J=0}^{k(2)}a_{2.J}v^J(x)\right)x$$

得(16)的前一项，且

$$F_1(x,a_{1.J})=\int^x f_1\left(u_1[v(t)]\right)dt=M_2(x,a_{2.J})+F_2(x,a_{2.J})$$

$$=f_1\left(\sum_{J=0}^{k(2)}a_{2.J}v^J(x)\right)x+F_2(x,a_{2.J})$$

将$F_2(x,a_{2.J})$的积分被积函数，记为$f_2\left(u_2[v(x)]\right)$，则

$$F_2(x,a_{2.J})=\int^x f_2\left(u_2[v(t)]\right)dt=\int^x f_1\left(u_1[v(t)]\right)dt-M_2(x,a_{2.J})$$

$$=\int^x f_1\left(u_1[v(t)]\right)dt-f_1\left(\sum_{J=0}^{k(2)}a_{2,J}v^J(x)\right)x$$

在(15)式积分中，为使$M_2(x,a_{2.J})$的值，最逼近$F_1(x,a_{1.J})$，须使$F_2(x,a_{2.J})$的值最小，即使$F_2(x,a_{2.J})$对 x 偏导的阶最小，由此通过对上式求x的偏导，构成(17)式表达的二级最小阶方程。用与一阶熊氏定理相似的方法，解此最小阶方程可确定$a_{2,J}$、$u_2[v(x)]$及$f_2\left(u_2[v(x)]\right)$等的值，从而获得$F_1(x,a_{1,J})$、$M_2(x,a_{2.J})$及$F_2(x,a_{2.J})$等的表达式，$(18)$的证明与$(8)$相似，此略

5. 1.4 R 级熊氏积分

R 级熊氏积分定义与二级熊氏积分定义类似：

定义 5　用 R-1 级取代函数

$$u_{R-1}\left[v(x)\right]: \sum_{J=0}^{k(R)} a_{R,J} v^{J}(x) \tag{19}$$

代入 R-1 级剩余值 $F_{R-1}\left(x, a_{R-1.J}\right)$ 积分表达式

$$F_{R-1}\left(x, a_{R-1.J}\right) = \int^{x} f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(x)\right]\right) dt \tag{20}$$

中，进行近似积分计算。由此得到的积分值，称为 R 级积分值，记为 $M_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$。其差 $F_{R-1}\left(x, a_{R-1.J}\right) - M_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$，简称 R 级剩余值，记为 $F_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$

将 $M_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$ 值与 $F_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$ 的近似积分值之和，称为 R 级熊氏积分

定理 4　由最小阶方程，及 R 级熊氏积分定义，可将 $F(x)$ 的 R 级熊氏积分

$F_{R-1}\left(x, a_{R-1.J}\right) = \int^{x} f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(x)\right]\right) dt$、$M_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$ 及 $F_{R}\left(x, a_{R.J}\right)$ 表为

$$F_{R-1}\left(x, a_{R-1.J}\right) = M_{R}\left(x, a_{R.J}\right) + F_{R}\left(x, a_{R.J}\right) \tag{21}$$

$$F_{R-1}\left(x, a_{R-1.J}\right) = f_{R-1}\left(\sum_{J=0}^{K_{R-1}} a_{R.J} v^{J}(x)\right)x + \int^{x} f_{R}\left(u_{R}\left[v(t)\right]\right) dt \tag{22}$$

其中，$k(R)$ 的值等于 $u_{R-1}\left[v(x)\right]$ 中，$v(x)$ 的最高幂指数，$a_{R.J}$、$u_{R}\left[v(t)\right]$ 及 $f_{R}\left(u_{R}\left[v(t)\right]\right)$ 等的值，由下面的 R 级最小阶方程确定

$$f_{R}\left(u_{r}\left[v(x)\right]\right) = f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(x)\right]\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[f_{R-1}\left(\sum_{J=0}^{k(R)} a_{R.J} v^{J}(x)\right)x\right] \Rightarrow 0 \tag{23}$$

其中，$k(R)$ 的值等于 $u_{R-1}\left[v(x)\right]$ 中，$v(x)$ 的最高幂指数

$$k(R) = \log_{v(t)} u_{R-1}\left[v(x)\right] + 1 = \frac{\ln u_{R-1}\left[v(x)\right]}{\ln v(t)} + 1 \tag{24}$$

将此积分方法，称为 R 级熊氏积分。熊氏积分可完整地表示为

$$F(x) = \int^{x} f\left(u\left[v(t)\right]\right) dt = f\left(\sum_{J=0}^{K(1)} a_{1.J} v^{J}(x)\right)x$$

$$+\sum_{r=2}^{R} f_{r-1}\left(\sum_{J=0}^{K(r)} a_{r.J} v^{J}(x)\right)x + {}^{\le} f_{R}\left(u_{R}\left[v(x)\right]\right)x \tag{25}$$

熊氏积分的 R 级近似值表为 ${}_{X(R)}F(x)$，则

$$ {}_{X(R)}F(x)=\int^{x} f\left(u\left[v(t)\right]\right)dt=f\left(\sum_{J=0}^{K(1)} a_{1.J}v^{J}(x)\right)x $$

$$ +\sum_{r=2}^{R} f_{r-1}\left(\sum_{J=0}^{K(r)} a_{r.J}v^{J}(x)\right)x+{}^{\le}f_{R}\left(u_{R}\left[v(x)\right]\right)x $$

由上式可知

1）　熊氏积分可应用在相关函数的近似积分中，理论上甚至能获得这类函数任意所需精度的近似积分值，并能确定误差的阶，即与 $f_{R}\left(u_{R}\left[v(x)\right]\right)x$ 同阶

2）　一旦确定了 $\int^{x} f_{R}\left(u_{R}\left[v(t)\right]\right)dt$ 中最高阶的系数，就可与 $\dfrac{f_{R}\left(u_{R}\left[v(t)\right]\right)x}{v(x)}$ 同阶

证明　证明过程与二级熊氏积分的证明相似，由 R 级熊氏积分定义，可直接得到 (21)

由 R 级取代函数 $u_{R-1}\left[v(t)\right]:\ \sum_{J=0}^{k(R)} a_{R.J}v^{J}(x)$ 得

$$ M_{R}\left(x,a_{R.J}\right)=\int^{x} f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(t)\right]:\ \sum_{J=0}^{k(R)} a_{R.J}v^{J}(x)\right)dt $$

$$ =\int^{x} f_{R-1}\left(\sum_{J=0}^{k(R)} a_{R.J}v^{J}(x)\right)dt=f_{R-1}\left(\sum_{J=0}^{k(R)} a_{R.J}v^{J}(x)\right)x $$

得 (22)，且

$$ F_{R-1}\left(x,a_{R-1.J}\right)=\int^{x} f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(t)\right]\right)dt=M_{R}\left(x,a_{R.J}\right)+F_{R}\left(x,a_{R.J}\right) $$

$$ =f_{R-1}\left(\sum_{J=0}^{k(R)} a_{R.J}v^{J}(x)\right)x+F_{R}\left(x,a_{R.J}\right) $$

将 $F_{R}\left(x,a_{R.J}\right)$ 的积分被积函数，记为 $f_{R}\left(u_{R}\left[v(t)\right]\right)$，则

$$ F_{R}\left(x,a_{R.J}\right)=\int^{x} f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(t)\right]\right)dt-M_{R}\left(x,a_{R.J}\right) $$

$$ =\int^{x} f_{R}\left(u_{R}\left[v(t)\right]\right)dt=\int^{x} f_{R-1}\left(u_{R-1}\left[v(t)\right]\right)dt-f_{R-1}\left(\sum_{J=0}^{k(R)} a_{R,J}v^{J}(x)\right)x $$

在(21)积分中，为使$M_R\left(x,a_{R.J}\right)$的值，最逼近$F_{R-1}\left(x,a_{R-1.J}\right)$，须使$F_R\left(x,a_{R.J}\right)$的值最小，即使$F_R\left(x,a_{R.J}\right)$对 x 偏导的阶最小，由此通过上式，构成$(23)$ 式表达的 R 级最小阶方程，(24)式的证明与(8)式相似，此略。用与一阶熊氏定理相似的方法，解此最小阶方程，可确定$a_{R,J}$、$u_R\left[v(t)\right]$及$f_R\left(u_R\left[v(t)\right]\right)$等的值，从而获得$F_{R-1}\left(x,a_{R-1.J}\right)$、$M_R\left(x,a_{R.J}\right)$及$F_R\left(x,a_{R.J}\right)$的表达式。

熊氏积分可完整地表达为

$$F(x)=\int^{x} f\left(u\left[v(t)\right]\right)dt=M_1\left(x,a_{1.J}\right)+F_1\left(x,a_{1.J}\right)=\sum_{r=1}^{2}M_r\left(x,a_{r.J}\right)+F_2\left(x,a_{2.J}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{R}M_r\left(x,a_{r.J}\right)+F_R\left(x,a_{R.J}\right)=\sum_{r=1}^{R}M_r\left(x,a_{r.J}\right)+\int^{x} f_R\left(u_R\left[v(t)\right]\right)dt$$

得(25)，及关于误差的结论，证毕

说明：　熊氏积分的重点是通过最小阶方程计算$f_r\left(u_r\left[v(t)\right]\right)$的值，下面通过实例，进一步说明熊氏积分的具体使用

5.2 $\int^x t^m \ln^{-S} t\, dt$ 的熊氏积分

5.2.1 $\int^x t^m \ln^{-1} t\, dt$ 的一级熊氏积分

用表达式$\int^x t^m \ln^{-S} t\, dt$简单地表示，形如$\int^x t^m \left(\sum_{J=0}^{S} c_J \ln^J t\right)^{-1} dt$类型的积分

定理 5 $\int^x t^m \left(c_1 \ln t + c_0\right)^{-1} dt$ 的一级熊氏积分为

$$F\ (x) = \int^x \frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{1} c_J \ln^J t} = \frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J t} + \int^x \frac{c_1^2 t^m}{\left(\sum_{J=0}^{1} c_J \ln^J t\right)\left(\sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J t\right)^2} dt \tag{26}$$

$$F\ (x) = \frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J t} + \frac{x^{m+1}}{c_1 (m+1)^2 \ln^3 x} + O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^4 x}\right) \tag{27}$$

其中

$$a_1 = (m+1) c_1 \tag{28}$$

$$a_0 = (m+1) c_0 - c_1 \tag{29}$$

证明 $F\ (x)$ 中被积函数的基本函数是 $\ln^J t$，最高次数是 1，则 $k(1) = 1$，故 $v(x) = \ln x: \ \ln t$，$u[v(x)]$的取代函数表达如下

$$u[v(x)] = \sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J x: \ \sum_{J=0}^{1} c_J \ln^J t \tag{30}$$

由(9)式的一级最小阶方程

$$f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right) = f\left(u\left[v(x)\right]\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(\sum_{J=0}^{k(1)} a_{1.J}\ v^J(x)\right)x\right] \Rightarrow 0$$

得

$$\frac{\partial}{\partial x} F_1(x) = f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right) = \frac{x^m}{\sum_{J=0}^{1} c_J \ln^J x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J x}$$

$$=x^m\frac{\left(\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J x\right)^2-(m+1)\left(\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J x\right)\left(\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J x\right)+\left(\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J x\right)a_1}{\left(\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J x\right)\left(\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J x\right)^2}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(x)=f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right)=x^m\sum_{I=0}^{2}\frac{D(I)\ln^I x}{\left(\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J x\right)\left(\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J x\right)^2}\Rightarrow 0 \qquad (31)$$

上式分式的分子中，$\ln^I x$ 的系数记为 $D(I)$ ，由最小阶方程定义得

$$D(2)=a_1^2-(m+1)c_1a_1=0$$

整理上式得(28) 式。

$$D(1)=2a_0a_1-(m+1)c_0a_1-(m+1)c_1a_0+c_1a_1$$

$$=2a_0a_1-(m+1)c_0a_1-a_1a_0+c_1a_1=a_0a_1-(m+1)c_0a_1+c_1a_1=0$$

整理上式得(29) 式。

$$D(0)=a_0^2-(m+1)c_0a_0+c_0a_1=\left[a_0-c_0(m+1)\right]a_0+c_0a_1$$

$$=-c_1a_0+c_0a_1=-c_1\left[(m+1)c_0-c_1\right]+c_0(m+1)c_1=c_1^2$$

由计算的 $D(I)$ 、a_J 值及(31) 工得

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(x)=f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right)=\frac{c_1^2x^m}{\left(\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J x\right)\left(\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J x\right)^2}=\frac{x^m}{(m+1)^2c_1\ln^3 x}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^4 x}\right)$$

对上式积分并代回(26) 式，得(27) 式

推理 1

$$\int^x\frac{t^m dt}{\ln t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\ln x-1}+\int^x\frac{t^m\ln^0 t}{\left[(m+1)\ln x-1\right]^2\ln t}dt \qquad (32)$$

$$\int^x\frac{t^m dt}{\ln t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\ln x-1}+\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2\ln^3 x}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^4 x}\right) \qquad (33)$$

证明 略

5.2.2 $\int^{x} t^{m}\ln^{-2}t\,dt$ 的一级熊氏积分

用表达式 $\int^{x} t^{m}\ln^{-2}t\,dt$ 地表示 $\int^{x}\left(c_{2}\ln^{2}t+c_{1}\ln t+c_{0}\right)^{-1}t^{m}dt$ 类型的熊氏积分

定理 6

$$F\left(x\right)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\sum_{J=0}^{2}c_{J}\ln^{J}t}=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}t}+\int^{x}\frac{t^{m}\sum_{J=0}^{1}D(J)\ln^{J}t}{\sum_{J=0}^{2}c_{J}\ln^{J}t\left(\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}t\right)^{2}}dt \tag{34}$$

$$a_{2}=c_{2}\left(m+1\right) \tag{35}$$

$$a_{1}=c_{1}\left(m+1\right)-2c_{2} \tag{36}$$

$$a_{0}=c_{0}\left(m+1\right)-c_{1}-\frac{2c_{2}}{m+1} \tag{37}$$

$$D\left(1\right)=\frac{8c_{2}^{2}}{m+1} \tag{38}$$

$$D\left(0\right)=\left(c_{1}+\frac{2c_{2}}{m+1}\right)^{2}-4c_{0}c_{2} \tag{39}$$

证明　　同理 由(9)式的一级最小阶方程，得

$$f_{1}\left(u_{1}\left[v\left(x\right)\right]\right)=\frac{x^{m}}{\sum_{J=0}^{2}c_{J}\ln^{J}x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}x}$$

$$=\frac{x^{m}}{\sum_{J=0}^{2}c_{J}\ln^{J}x}-\frac{\left(m+1\right)x^{m}}{\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}x}-\frac{x^{m}\sum_{J=1}^{2}Ja_{J}\ln^{J-1}x}{\left(\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}x\right)^{2}}$$

$$=x^{m}\frac{\left(\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}t\right)^{2}-\sum_{J=0}^{2}c_{J}\ln^{J}x\left[\left(m+1\right)\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}t-\sum_{J=1}^{2}Ja_{J}\ln^{J-1}t\right]}{\left(\sum_{J=0}^{2}c_{J}\ln^{J}x\right)\left(\sum_{J=0}^{2}a_{J}\ln^{J}t\right)^{2}}$$

$$= x^m \frac{\sum_{J=0}^{4} D(J) \ln^J x}{\sum_{J=0}^{2} c_J \ln^J x \left(\sum_{J=0}^{2} a_J \ln^J t \right)^2} \Rightarrow 0$$

由此最小阶方程知，上面分式分子中，$\ln^J x$ 的三个较高阶项的系数 $D(J)$ 为零，所以：

$$D(4) = a_2^2 - (m+1) c_2 a_2 = 0 \tag{40}$$

整理上式，得 (35) 式

$$D(3) = 2a_1 a_2 - (m+1) c_1 a_2 - (m+1) c_2 a_1 + 2c_2 a_2$$

$$= 2a_1 a_2 - c_1 (m+1) a_2 - a_1 a_2 + 2c_2 a_2$$

$$= \left[a_1 - c_1 (m+1) + 2c_2 \right] a_2 = 0 \tag{41}$$

整理上式，得 (36) 式

$$D(2) = 2a_0 a_2 + a_1^2 - c_0 (m+1) a_2 - c_1 \left[(m+1) a_1 - 2a_2 \right] - c_2 \left[(m+1) a_0 - a_1 \right]$$

$$= a_0 \left[2a_2 - c_2 (m+1) \right] + \left[a_1 - c_1 (m+1) + c_2 \right] a_1 - \left[c_0 (m+1) - 2c_1 \right] a_2$$

$$= a_0 a_2 - c_2 a_1 - \left[c_0 (m+1) - 2c_1 \right] a_2 = 0$$

$$a_0 = c_0 (m+1) - 2c_1 + \frac{c_2 a_1}{a_2} = c_0 (m+1) - 2c_1 + \frac{c_2 \left[c_1 (m+1) - 2c_2 \right]}{c_2 (m+1)}$$

整理上式，得 (37) 式

$$D(1) = 2a_0 a_1 - c_0 (m+1) a_1 + 2c_0 a_2 - c_1 (m+1) a_0 + c_1 a_1$$

$$D(1) = a_0 \left[2a_1 - c_1 (m+1) \right] + \left[c_1 - c_0 (m+1) \right] a_1 + 2c_0 a_2$$

$$D(1) = a_0 \left[2\left(c_1 (m+1) - 2c_2 \right) - c_1 (m+1) \right]$$

$$+ \left[c_1 - c_0 (m+1) \right] \left[c_1 (m+1) - 2c_2 \right] + 2c_0 a_2$$

$$D(1) = a_0 \left[c_1 (m+1) - 4c_2 \right] + \left[\left(c_1^2 + 2c_0 c_2 \right) (m+1) - 2c_1 c_2 - c_0 c_1 (m+1)^2 \right]$$

$$+ 2c_0 c_2 (m+1)$$

$$D(1)=\left[c_0(m+1)-c_1-\frac{2c_2}{m+1}\right]\left[c_1(m+1)-4c_2\right]+\left(c_1^2+4c_0c_2\right)(m+1)$$

$$-2c_1c_2-c_0c_1(m+1)^2$$

$$D(1)=\left[c_0c_1(m+1)^2-c_1^2(m+1)-2c_1c_2-4c_0c_2(m+1)+4c_1c_2+\frac{8c_2^2}{m+1}\right]$$

$$+\left(c_1^2+4c_0c_2\right)(m+1)-2c_1c_2-c_0c_1(m+1)^2=\frac{8c_2^2}{m+1}$$

得(38)式

$$D(0)=a_0^2-c_0\left[(m+1)a_0-a_1\right]=a_0\left[a_0-c_0(m+1)\right]+c_0a_1$$

$$D(0)=a_0\left[c_0(m+1)-c_1-\frac{2c_2}{m+1}-c_0(m+1)\right]+c_0a_1$$

$$D(0)=-a_0\left[c_1+\frac{2c_2}{m+1}\right]+c_0\left[c_1(m+1)-2c_2\right]$$

$$D(0)=-\left[c_0(m+1)-\left(c_1+\frac{2c_2}{m+1}\right)\right]\left[c_1+\frac{2c_2}{m+1}\right]+c_0\left[c_1(m+1)-2c_2\right]$$

$$D(0)=-\left[c_0c_1(m+1)+2c_0c_2-\left(c_1+\frac{2c_2}{m+1}\right)^2\right]+c_0\left[c_1(m+1)-2c_2\right]$$

$$D(0)=\left(c_1+\frac{2c_2}{m+1}\right)^2-4c_0c_2$$

整理上式，得(39)式

5.2.3 $\int^x t^m \ln^{-3} t\,dt$ 的一级熊氏积分

用$\int^x t^m \ln^{-3} t\,dt$ 表示$\int^x\left(c_3\ln^3 t+c_2\ln^2 t+c_1\ln t+c_0\right)^{-1}t^m dt$ 类型的积分

定理 7

$$F(x)=\int^{x}\frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{3}c_J\ln^J t}=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t}+\int^{x}\frac{\left[t^m\sum_{J=0}^{2}D(J)\ln^J t\right]dt}{\sum_{J=0}^{3}c_J\ln^J t\left(\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t\right)^2} \tag{42}$$

$$F(x)=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t}+\frac{x^{m+1}D(2)}{c_3a_3^2\ln^7 x}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^8 x}\right) \tag{43}$$

$$a_3=c_3(m+1) \tag{44}$$

$$a_2=c_2(m+1)-3c_3 \tag{45}$$

$$a_1=c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1} \tag{46}$$

$$a_0=c_0(m+1)-c_1-\frac{c_2}{(m+1)}-\frac{15c_3}{(m+1)^2} \tag{47}$$

$$D(2)=c_2^2-3c_1c_3+\frac{99c_3^2}{(m+1)^2} \tag{48}$$

$$D(1)=-9c_0c_3+c_1c_2+\frac{4c_2^2-12c_1c_3}{(m+1)}+\frac{66c_2c_3}{(m+1)^2}+\frac{90c_3^2}{(m+1)^3} \tag{49}$$

$$D(0)=\left[c_1+\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]^2-3c_0c_2-\frac{18c_0c_3}{(m+1)} \tag{50}$$

证明　同理，由(9)式的一级最小阶方程，得

$$f_1\left(u_1\left[v(x)\right]\right)=\frac{x^m}{\sum_{J=0}^{2}c_J\ln^J x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{2}a_J\ln^J x}$$

$$=\frac{x^m}{\sum_{J=0}^{2}c_J\ln^J x}-\frac{(m+1)x^m}{\sum_{J=0}^{2}a_J\ln^J x}-\frac{x^m\sum_{J=1}^{2}Ja_J\ln^{J-1}x}{\left(\sum_{J=0}^{2}a_J\ln^J x\right)^2}$$

$$=x^m\frac{\left(\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t\right)^2-\sum_{J=0}^{3}c_J\ln^J x\left[(m+1)\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t-\sum_{J=1}^{3}Ja_J\ln^{J-1}t\right]}{\sum_{J=0}^{3}c_J\ln^J x\left(\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t\right)^2}$$

$$=x^m\frac{\sum_{J=0}^{6}D(J)\ln^J x}{\sum_{J=0}^{3}c_J\ln^J x\left(\sum_{J=0}^{3}a_J\ln^J t\right)^2}\Rightarrow 0$$

由此最小阶方程知，上面分式的分子中，$\ln^J x$ 的四个较高阶项系数 $D(J)$ 为零，则

$$D(6)=a_3^2-c_3a_3(m+1)=0\quad,\quad a_3=c_3(m+1)$$

得(44)式。

$$D(5)=2a_2a_3-c_2(m+1)a_3-c_3(m+1)a_2+3c_3a_3$$

$$D(5)=2a_2a_3-c_2(m+1)a_3-c_3(m+1)a_2+3c_3a_3$$

$$D(5)=\left[a_2-c_2(m+1)+3c_3\right]a_3=0$$

整理上式，得(45)式。

$$D(4)=2a_1a_3+a_2^2-c_1(m+1)a_3-c_2\left[(m+1)a_2-3a_3\right]-c_3\left[(m+1)a_1-2a_2\right]$$

$$D(4)=2a_1a_3-c_3(m+1)a_1+a_2^2-c_2(m+1)a_2+2c_3a_2-c_1(m+1)a_3+3c_2a_3$$

$$D(4)=2a_1a_3-a_3a_1+\left[a_2-c_2(m+1)+2c_3\right]a_2-\left[c_1(m+1)-3c_2\right]a_3$$

$$D(4)=a_1a_3+\left[c_2(m+1)-3c_3-c_2(m+1)+2c_3\right]a_2-\left[c_1(m+1)-3c_2\right]a_3$$

$$D(4)=a_1a_3-c_3\left[c_2(m+1)-3c_3\right]-\left[c_1(m+1)-3c_2\right]a_3=0$$

$$a_1=c_1(m+1)-3c_2+\frac{c_3\left[c_2(m+1)-3c_3\right]}{c_3(m+1)}=c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}$$

得(46)式

$$D(3)=2a_0a_3+2a_1a_2-c_0(m+1)a_3-c_1(m+1)a_2$$

$$+3c_1a_3-c_2(m+1)a_1+2c_2a_2-c_3(m+1)a_0+c_3a_1$$

$$D(3)=2a_0a_3-c_3(m+1)a_0+2a_1a_2-c_2(m+1)a_1$$

$$+c_3a_1-c_1(m+1)a_2+2c_2a_2-c_0(m+1)a_3+3c_1a_3$$

$$D(3)=\left[2a_3-c_3(m+1)\right]a_0+\left[2a_2-c_2(m+1)+c_3\right]a_1$$

$$-\left[c_1(m+1)-2c_2\right]a_2-\left[c_0(m+1)-3c_1\right]a_3$$

$$D(3)=a_3a_0+\left[2a_2-a_2-3c_3+c_3\right]a_1-\left[a_1+\frac{3c_3}{m+1}\right]a_2-\left[c_0(m+1)-3c_1\right]a_3$$

$$D(3)=a_3a_0-2c_3a_1-\frac{3c_3a_2}{m+1}-\left[c_0(m+1)-3c_1\right]a_3$$

$$=a_3\left\{a_0-\frac{2c_3a_1}{a_3}-\frac{3c_3a_2}{(m+1)a_3}-\left[c_0(m+1)-3c_1\right]\right\}=0$$

$$a_0=\frac{2a_1}{(m+1)}+\frac{3a_2}{(m+1)^2}+\left[c_0(m+1)-3c_1\right]$$

$$a_0=\frac{2}{(m+1)}\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]$$

$$+3\frac{c_2(m+1)-3c_3}{(m+1)^2}+\left[c_0(m+1)-3c_1\right]$$

$$a_0=2c_1-\frac{4c_2}{(m+1)}-\frac{6c_3}{(m+1)^2}+3\frac{c_2(m+1)-3c_3}{(m+1)^2}+\left[c_0(m+1)-3c_1\right]$$

整理上式，得(47)式

$$D(2)=2a_0a_2+a_1^2+c_0(m+1)a_2+3c_0a_3-c_1(m+1)a_1\quad 2c_1a_2-c_2(m+1)a_0\quad c_2a_1$$

$$D(2)=2a_0a_2-c_2(m+1)a_0+a_1^2-c_1(m+1)a_1+c_2a_1-c_0(m+1)a_2+2c_1a_2+3c_0a_3$$

$$D(2)=a_0\left[2a_2-c_2(m+1)\right]+\left[a_1-c_1(m+1)+c_2\right]a_1+\left[2c_1-c_0(m+1)\right]a_2+3c_0a_3$$

$$D(2)=a_0\left[2a_2-c_2(m+1)\right]+\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}-c_1(m+1)+c_2\right]a_1$$

$$+\left[2c_1-c_0(m+1)\right]a_2+3c_0a_3$$

$$D(2)=a_0\left\{2\left[c_2(m+1)-3c_3\right]-c_2(m+1)\right\}-\left[c_2+\frac{3c_3}{m+1}\right]a_1$$

$$+\left[2c_1-c_0(m+1)\right]\left[c_2(m+1)-3c_3\right]+3c_0a_3$$

$$D(2)=a_0\left[c_2(m+1)-6c_3\right]-\left[c_2+\frac{3c_3}{m+1}\right]a_1$$

$$+\left[\left(2c_1c_2+3c_0c_3\right)(m+1)-6c_1c_3-c_0c_2(m+1)^2\right]+3c_0a_3$$

$$D(2)=a_0\left[c_2(m+1)-6c_3\right]-\left[c_2+\frac{3c_3}{m+1}\right]\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]$$

$$+\left[2c_1c_2(m+1)-6c_1c_3-c_0c_2(m+1)^2\right]+6c_0a_3$$

$$D(2)=\left[c_0(m+1)-c_1-\frac{c_2}{(m+1)}-\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]\left[c_2(m+1)-6c_3\right]$$

$$-\left[c_1c_2(m+1)+3c_1c_3-2c_2^2+\frac{6c_2c_3}{m+1}+\frac{3c_2c_3}{m+1}+\frac{9c_3^2}{(m+1)^2}\right]$$

$$+\left[2c_1c_2(m+1)-6c_1c_3-c_0c_2(m+1)^2\right]+6c_0a_3$$

$$D(2)=\left[c_0c_2(m+1)^2-c_1c_2(m+1)-c_2^2-\frac{15c_2c_3}{(m+1)}\right.$$

$$\left.-6c_0c_3(m+1)+6c_1c_3+\frac{6c_2c_3}{(m+1)}+\frac{90c_3^2}{(m+1)^2}\right]$$

$$-\left[-c_1c_2(m+1)\quad 9c_1c_3-2c_2^2-\frac{9c_2c_3}{m+1}-\frac{9c_3^2}{(m+1)^2}\right]-c_0c_2(m+1)^2+6c_0a_3$$

整理上式，得(48)式。

$$D(1)=2a_0a_1-c_0(m+1)a_1+2c_0a_2-c_1(m+1)a_0+c_1a_1$$

$$D(1)=2a_0a_1-c_1(m+1)a_0-c_0(m+1)a_1+c_1a_1+2c_0a_2$$

$$D(1)=a_0\left[2a_1-c_1(m+1)\right]-\left[c_0(m+1)-c_1\right]a_1+2c_0a_2$$

$$D(1)=a_0\left[a_1-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]-\left[a_0+\frac{c_2}{(m+1)}\quad\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]a_1+2c_0a_2$$

$$D(1)=-\left[c_0(m+1)-c_1-\frac{c_2}{(m+1)}-\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]\left[2c_2\quad\frac{3c_3}{m+1}\right]$$

$$-\left[\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]a_1+2c_0a_2$$

$$D(1)=-\left[+2c_0c_2(m+1)-2c_1c_2-\frac{2c_2^2}{(m+1)}-\frac{30c_2c_3}{(m+1)^2}\quad 3c_0c_3-\frac{3c_1c_3}{m+1}-\frac{3c_2c_3}{(m+1)^2}-\frac{45c_3^2}{(m+1)^3}\right]$$

$$-\left[\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]+2c_0\left[c_2(m+1)-3c_3\right]$$

$$D(1)=-\left[+2c_0c_2(m+1)\quad 3c_0c_3-2c_1c_2-\frac{3c_1c_3}{m+1}-\frac{2c_2^2}{(m+1)}-\frac{33c_2c_3}{(m+1)^2}-\frac{45c_3^2}{(m+1)^3}\right]$$

$$-\left[\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]+2c_0\left[c_2(m+1)-3c_3\right]$$

$$D(1)=-\left[9c_0c_3-2c_1c_2-\frac{3c_1c_3}{m+1}-\frac{2c_2^2}{(m+1)}-\frac{33c_2c_3}{(m+1)^2}-\frac{45c_3^2}{(m+1)^3}\right]$$

$$-\left[c_1c_2-\frac{2c_2^2}{(m+1)}-\frac{3c_2c_3}{(m+1)^2}+\frac{15c_1c_3}{(m+1)}-\frac{30c_2c_3}{(m+1)^2}-\frac{45c_3^2}{(m+1)^3}\right]$$

$$D(1)=-\left[9c_0c_3-c_1c_2+\frac{12c_1c_3}{m+1}-\frac{4c_2^2}{(m+1)}-\frac{66c_2c_3}{(m+1)^2}-\frac{90c_3^2}{(m+1)^3}\right]$$

整理上式，得(49)式

$$D(0)=a_0^2-c_0\left[(m+1)a_0-a_1\right]=a_0\left[a_0-c_0(m+1)\right]+c_0a_1$$

$$D(0)=\left[c_0(m+1)-c_1-\frac{c_2}{(m+1)}-\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]$$

$$\left\{c_0(m+1)-c_1-\frac{c_2}{(m+1)}-\frac{15c_3}{(m+1)^2}-c_0(m+1)\right\}+c_0a_1$$

$$D(0)=\left[-c_0(m+1)+c_1+\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]\left\{c_1+\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right\}$$

$$+c_0\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]$$

$$D(0)=-c_0c_1(m+1)-c_0c_2-\frac{15c_0c_3}{(m+1)}+\left[c_1+\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]^2+c_0\left[c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}\right]$$

整理上式，得(50) 式。

推理 2
$$F(x)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\ln t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\ln x-1}$$
$$+\frac{x^{m+1}}{(m+1)^{3}\ln^{3}x-5(m+1)^{2}\ln^{2}x+2(m+1)\ln t-14}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^{7}x}\right)\qquad(51)$$

5.2.4 $\int^{x}t^{m}\ln^{-S}t\,dt$ 的近似积分

引理 1
$$\frac{x^{m+1}}{(y+1)^{S}}=\frac{x^{m+1}}{y^{S}}\left(1-\frac{1}{y}+{}^{1}\frac{1}{y^{2}}\right)^{S}=\frac{x^{m+1}}{y^{S}}\left(1-\frac{S}{y}+\frac{{}^{1}S(S-1)}{y^{2}}+\frac{1}{y^{S}}\right)\qquad(52)$$

定理 8
$$F(x)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\ln^{S}t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)(\ln x-1)^{S}}-\frac{mSx^{m+1}}{(m+1)^{2}(\ln x-1)^{S+1}}+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m+1}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m+1}}{\ln^{2S}x}\qquad(53)$$

证明　　令
$$F(x)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\ln^{S}t}=\frac{Dx^{m+1}}{(\ln x-1)^{S}}+u_{1}(x)\qquad(54)$$

对上式两边求 x 的偏导，并用(52) 式，得
$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}=\frac{x^{m}}{\ln^{S}x}=\frac{x^{m}}{(\ln x-1+1)^{S}}=\frac{x^{m}}{(\ln x-1)^{S}}-\frac{Sx^{m}}{(\ln x-1)^{S+1}}+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m}}{\ln^{2S}x}$$
$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}=\frac{D(m+1)x^{m}}{(\ln x-1)^{S}}-\frac{DSx^{m}}{(\ln x-1)^{S+1}}+u'_{1}(x)$$

由上面两个等式，得
$$\frac{D(m+1)x^{m}}{(\ln x-1)^{S}}-\frac{DSx^{m}}{(\ln x-1)^{S+1}}+u'_{1}(x)=\frac{x^{m}}{(\ln x-1)^{S}}-\frac{Sx^{m}}{(\ln x-1)^{S+1}}+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m}}{\ln^{2S}x}$$
$$u'_{1}(x)=\frac{x^{m}}{(\ln x-1)^{S}}-\frac{D(m+1)x^{m}}{(\ln x-1)^{S}}+\frac{DSx^{m}}{(\ln x-1)^{S+1}}-\frac{Sx^{m}}{(\ln x-1)^{S+1}}+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m}}{\ln^{2S}x}$$

显然：$D(m+1)=1$ 能使上式中 $u'_{1}(x)$ 的阶最小，则
$$u_{1}(x)=\int^{x}\left[\frac{St^{m}}{(m+1)(\ln t-1)^{S+1}}-\frac{St^{m}}{(\ln t-1)^{S+1}}\right]dt+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m+1}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m+1}}{\ln^{2S}x}$$

$$F(x)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\ln^{S}t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)(\ln x-1)^{S}}+u_{1}(x)$$

比较上面两式，得

$$u_{1}(x)=\frac{Sx^{m+1}}{(m+1)^{2}(\ln x-2)^{S+1}}-\frac{Sx^{m+1}}{(m+1)(\ln x-2)^{S+1}}+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m+1}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m+1}}{\ln^{2S}x}$$

$$u_{1}(x)=-\frac{mSx^{m+1}}{(m+1)^{2}(\ln x-2)^{S+1}}+\frac{{}^{1}S(S-1)x^{m+1}}{\ln^{S+2}x}+\frac{x^{m+1}}{\ln^{2S}x}$$

将上式代入(54)式，并注意$D(m+1)=1$，得(53)式

5. 2.5 $\int^{x}t^{m}\ln^{-1}t\,dt$的二级熊氏积分

定义 6 $F(x)$的一级积分剩余为$F_{1}(x)$，$F_{1}(x)$的积分主值为$M_{2}(x)$，$F_{1}(x)$的积分剩余为$F_{2}(x)$，将$M_{2}(x)$的值及$F_{2}(x)$的近似计算值之和，称为$F(x)$的二级熊氏积分

定理 9 $\int^{x}t^{m}\ln^{-1}t\,dt$的一级积分剩余为$F_{1}(x)$，二级积分剩余为$F_{2}(x)$，则

$$F(x)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{c_{1}\ln t+c_{0}}=\frac{x^{m+1}}{a_{1}\ln t+a_{0}}+F_{1}(x)\quad\begin{pmatrix}a_{1}=c_{1}(m+1)\\ a_{0}=c_{0}(m+1)-c_{1}\end{pmatrix}\qquad(55)$$

$$F_{1}(x)=\int^{x}\frac{t^{m}\,dt}{\sum_{J=0}^{1}c_{J}\ln^{J}t\left(\sum_{J=0}^{1}a_{J}\ln^{J}t\right)^{2}}=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\sum_{J=0}^{3}C_{J}\ln^{J}t}=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{3}A_{J}\ln^{J}t}+F_{2}(x)\qquad(56)$$

$$F_{2}(x)=\int^{x}\left[t^{m}\sum_{J=0}^{2}D(J)\ln^{J}t\right]\div\sum_{J=0}^{3}C_{J}\ln^{J}t\left(\sum_{J=0}^{3}A_{J}\ln^{J}t\right)^{2}dt\qquad(57)$$

$$C_{3}=c_{1}a_{1}^{2}=c_{1}^{3}(m+1)^{2}\qquad(58)$$

$$C_{2}=c_{0}a_{1}^{2}+2c_{1}a_{0}a_{1}=3c_{0}c_{1}^{2}(m+1)^{2}-2c_{1}^{3}(m+1)\qquad(59)$$

$$C_{1}=\left(2c_{0}a_{0}a_{1}+c_{1}a_{0}^{2}\right)=\left[3c_{0}c_{1}(m+1)-c_{1}^{2}\right]\left[c_{0}(m+1)-c_{1}\right]\qquad(60)$$

$$C_{0}=c_{0}a_{0}^{2}=c_{0}\left[c_{0}(m+1)-c_{1}\right]^{2}\qquad(61)$$

$$A_3 = C_3(m+1) = c_1^3(m+1)^3 \tag{62}$$

$$A_2 = C_2(m+1) - 3C_3 = 3c_0c_1^2(m+1)^3 - 5c_1^3(m+1)^2 \tag{63}$$

$$A_1 = C_1(m+1) - 2C_2 - \frac{3C_3}{m+1} \tag{64}$$

$$A_0 = C_0(m+1) - C_1 - \frac{C_2}{(m+1)} - \frac{15C_3}{(m+1)^2} \tag{65}$$

$$D(2) = C_2^2 - 3C_1C_3 + \frac{99C_3^2}{(m+1)^2} \tag{66}$$

$$D(1) = -9C_0C_3 + C_1C_2 + \frac{4C_2^2 - 12C_1C_3}{m+1} + \frac{66C_2C_3}{(m+1)^2} + \frac{90C_3^2}{(m+1)^3} \tag{67}$$

$$D(0) = \left[C_1 + \frac{C_2}{(m+1)} + \frac{15C_3}{(m+1)^2}\right]^2 - 3C_0C_2 - \frac{18C_0C_3}{(m+1)} \tag{68}$$

证明　将(26)：(29)式写成(55)式的形式，(56)式就是一个形如$\int^x t^m \ln^{-3} t\,dt$的一级熊氏积分，由(42)：(50)式知，(62)：(68)式成立。由

$$(c_0 + c_1 \ln t)\left(\sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J t\right)^2 = (c_0 + c_1 \ln t)(a_0^2 + 2a_0a_1 \ln t + a_1^2 \ln^2 t)$$

$$= c_0a_0^2 + (2c_0a_0a_1 + c_1a_0^2)\ln t + (c_0a_1^2 + 2c_1a_0a_1)\ln^2 t + c_1a_1^2 \ln^3 t = \sum_{J=0}^{3} C_J \ln^J t$$

$$C_3 = c_1a_1^2 = c_1^3(m+1)^2$$

得(58)式，由

$$C_2 = c_0a_1^2 + 2c_1a_0a_1 = c_0c_1^2(m+1)^2 + 2c_1[c_0(m+1) - c_1]c_1(m+1)$$

$$= 3c_0c_1^2(m+1)^2 - 2c_1^3(m+1)$$

得(59)式，由

$$C_1 = 2c_0a_0a_1 + c_1a_0^2 = (2c_0a_1 + c_1a_0)a_0$$

$$= \{2c_0c_1(m+1) + c_1[c_0(m+1) - c_1]\}[c_0(m+1) - c_1]$$

$$C_1=\left[3c_0c_1(m+1)-c_1^2\right]\left[c_0(m+1)-c_1\right]$$

得 (60) 式，由

$$C_0=c_0a_0^2=c_0\left[c_0(m+1)-c_1\right]^2$$

得 (61) 式

实际使用中，不一定要使用上面的公式，常根据定义直接计算更方便

下面将本定理应用在 $li(x)$ 的近似函数表达式的计算中

5. 2.6 li(x)函数的近似值

定理 10　$li(x)$ 的一级积分剩余为 $F_1(x)$，二级积分剩余为 $F_2(x)$，$li(x)$ 的二级熊氏积分近似值记为 ${}_{X(2)}li(x)$，则

$$li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\frac{x}{\ln x-1}+F_1(x)=\int^x\frac{t^m dt}{c_1\ln t+c_0} \tag{69}$$

$$F_1(x)=\int^x\frac{dt}{(\ln x-1)^2\ln t}=\frac{x}{\ln^3 x-5\ln^2 x+2\ln x-14}+F_2(x) \tag{70}$$

$$F_2(x)=\int^x\frac{\left(100\ln^2 t-40\ln t+196\right)dt}{\left(\ln^3 t-5\ln^2 t+2\ln t-14\right)^2(\ln t-1)^2\ln t}$$

$$=\frac{100x}{\ln^7 x}+\frac{1360x}{\ln^8 x}+O\left(\frac{x}{\ln^9 x}\right) \tag{71}$$

$${}_{X(2)}li(x)={}_{X(2)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\frac{x}{\ln x-1}+F_1(x)+F_2(x)$$

$$=\frac{x}{\ln x-1}+\frac{x}{\ln^3 x-5\ln^2 x+2\ln x-14}+\frac{100x}{\ln^7 x}+\frac{1360x}{\ln^8 x}+O\left(\frac{x}{\ln^9 x}\right) \tag{72}$$

证明　　在 (69) 式中，显然得

$$m=0,\quad c_1=1,\quad c_0=0 \tag{73}$$

由 (26) 式，得

$$F(x)=\int^{x}\frac{t^{m}dt}{\sum_{J=0}^{1}c_{J}\ln^{J}t}=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{1}a_{J}\ln^{J}t}+\int^{x}\frac{c_{1}^{2}t^{m}}{\left(\sum_{J=0}^{1}c_{J}\ln^{J}t\right)\left(\sum_{J=0}^{1}a_{J}\ln^{J}t\right)^{2}}dt$$

$$=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{1}a_{J}\ln^{J}t}+\frac{x^{m+1}}{c_{1}(m+1)^{2}\ln^{3}x}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^{4}x}\right)$$

其中，

$$a_{1}=(m+1)c_{1}=1,\qquad a_{0}=(m+1)c_{0}-c_{1}=-1$$

得

$$F(x)=\int^{x}\frac{dt}{\ln t}=\frac{x^{1}}{\ln x-1}+\int^{x}\frac{dt}{(\ln x-1)^{2}\ln t}=\frac{x^{1}}{\ln x-1}+\frac{x^{1}}{\ln^{3}x}+O\left(\frac{x^{1}}{\ln^{4}x}\right)$$

得(69)、(70)式。由(58)：(69)式，得

$$C_{3}=c_{1}a_{1}^{2}=c_{1}^{3}(m+1)^{2}=1$$

$$C_{2}=c_{0}a_{1}^{2}+2c_{1}a_{0}a_{1}=-2$$

$$C_{1}=\left(2c_{0}a_{0}a_{1}+c_{1}a_{0}^{2}\right)=1$$

$$C_{0}=c_{0}a_{0}^{2}=0$$

$$A_{3}=C_{3}(m+1)=c_{1}^{3}(m+1)^{3}=1$$

$$A_{2}=C_{2}(m+1)-3C_{3}=-2-3=-5$$

$$A_{1}=C_{1}(m+1)-2C_{2}-\frac{3C_{3}}{m+1}=1+4-3=2$$

$$A_{0}=C_{0}(m+1)-C_{1}-\frac{C_{2}}{(m+1)}-\frac{15C_{3}}{(m+1)^{2}}=0-1+2-15=-14$$

$$D(2)=C_{2}^{2}-3C_{1}C_{3}+\frac{99C_{3}^{2}}{(m+1)^{2}}=4-3+99=100$$

$$D(1)=-9C_{0}C_{3}+C_{1}C_{2}+\frac{4C_{2}^{2}-12C_{1}C_{3}}{m+1}+\frac{66C_{2}C_{3}}{(m+1)^{2}}+\frac{90C_{3}^{2}}{(m+1)^{3}}$$

$$=0-2+(16-12)+66(-2)+90=-40$$

$$D(0)=\left[C_1+\frac{C_2}{(m+1)}+\frac{15C_3}{(m+1)^2}\right]^2-3C_0C_2-\frac{18C_0C_3}{(m+1)}=[1-2+15]^2=196$$

将上面的有关量代入(55)及(57)式，得(70)

$$li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\frac{x}{\ln x-1}+\int^x\frac{dt}{(\ln t-1)^2\ln t}$$

所以

$$li(x)=\frac{x}{\ln x-1}+\frac{x}{\ln^3 x-5\ \ln^2 x+2\ln x-14}+F_2(x) \qquad (74)$$

由上面计算的数据及(55)式，得

$$F_1(x)=\int^x\frac{t^m\ dt}{\sum_{J=0}^{1}c_J\ln^J t\left(\sum_{J=0}^{1}a_J\ln^J t\right)^2}=\int^x\frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{3}C_J\ln^J t}$$

$$=x^{m+1}\div\sum_{J=0}^{3}A_J\ln^J t+\int^x\left[t^m\sum_{J=0}^{2}D(J)\ln^J t\right]\div\sum_{J=0}^{3}C_J\ln^J t\left(\sum_{J=0}^{3}A_J\ln^J t\right)^2 dt$$

$$F_2(x)=\int^x\frac{\left(100\ln^2 t-40\ln t+196\right)dt}{\left(\ln^3 t-5\ln^2 t+2\ln t-14\right)^2(\ln t-1)^2\ln t}$$

$$=\int^x\frac{\left(100\ln^2 t-{}^{1}\ 40\ln t\right)dt}{\ln^9 t-{}^{1}\ 7\ln^8 t}=\int^x\left(\frac{100}{\ln^7 t}+\frac{{}^{1}700-40}{\ln^8 t}\right)dt$$

$$=\int^x\left(\frac{100}{\ln^7 t}+\frac{{}^{1}660}{\ln^8 t}\right)dt=\frac{100x}{(\ln x-1)^7}+\frac{{}^{1}660x}{\ln^8 x}=\frac{100x}{\ln^7 t}+\frac{{}^{1}1360x}{\ln^8 x}$$

得(71)、(72)式

实际数据见表 5.1，令

$$Li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\frac{x}{\ln x-1}+\frac{x}{\ln^3 x-5\ \ln^2 x+2\ln x-14}+\frac{100x}{\ln^7 x}+\frac{1360x}{\ln^8 x}$$

$Li(x)$ 函数数据表

x	10^3	10^9	10^{25}
li(x)	178.40	50849235	$17684630940*10^{13}$
Li(x)	180.67	50849139	$17684630931*10^{13}$
$x/(\ln x-1)$	169.27	50701542	$17678893105*10^{13}$

$x\left(\sum_{J=0}^{3} a_J \ln^J x\right)^{-1}$	11.01	147496	$5737767*10^{13}$
$100x\ln^{-7} x$	0.13	61	$48*10^{13}$
$1360x\ln^{-8} x$	0.26	40	$11*10^{13}$
$[\text{li(x)-Li(x)}]/\text{li}(x)$	-0.012	$2*10^{-6}$	$5*10^{-10}$

其中 $\dfrac{x}{\sum_{J=0}^{3} a_J \ln^J x} = \dfrac{x}{\ln^3 x - 5\ln^2 x + 2\ln x - 14}$

5.3 $\mathrm{U}_K(t)$ 函数值

5.3.1 $\mathrm{U}_K(t)$ 函数的定义

定义 7

$$li(y)=\int_2^y \frac{x^m dx}{\ln x}\,,\ \mathrm{U}_1(t)=\int_3^t li(y)\,dy\,,\quad \mathrm{U}_k(t)=\int_3^t \frac{\mathrm{U}_{k-1}(y)dy}{x-y}\quad (2\le k) \qquad (75)$$

5.3.2 $\mathrm{U}_1(t)$ 函数近似值

引理 2

$$\frac{x^2}{\ln 0.5x-1.5}=\left\{1-\frac{1}{2\ln 0.5x}-\frac{7}{4\ln^2 0.5x}-\frac{61}{8\ln^3 0.5x}+\frac{\le 1}{\ln^4 x}\right\}4li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}$$

证明　略

引理 3

$$\int^t \frac{y\,dy}{\ln y-1}=\frac{t^2}{2\ln t-3}+\frac{t^2}{8\ln^3 t-44\ln^2 t+68\ln t-46}+\frac{\le t^2}{\ln^7 t} \qquad (76)$$

证明　由(55)：(68) 式，得

$$F\ (x)=\int^x \frac{t^m dt}{c_1\ \ln t+c_0}=\frac{x^{m+1}}{a_1\ \ln t+a_0}+F_1(x)$$

其中，

$$\begin{pmatrix} a_1=c_1(m+1)=2 & c_1=1 \\ a_0=c_0(m+1)-c_1=-3 & c_0=-1 \end{pmatrix},\ m=1 \qquad (77)$$

$$F_1(x)=\int^x \frac{t^m\ dt}{\sum_{J=0}^{1} c_J \ln^J t\left(\sum_{J=0}^{1} a_J \ln^J t\right)^2}=\int^x \frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{3} C_J \ln^J t}$$

$$=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{3} A_J \ln^J t}+\int^x \frac{\left[t^m \sum_{J=0}^{2} D(J)\ln^J t\right]dt}{\sum_{J=0}^{3} C_J \ln^J t\left(\sum_{J=0}^{3} A_J \ln^J t\right)^2} \qquad (78)$$

$$C_3=c_1 a_1^2=2^2=4 \qquad (79)$$

$$C_2 = c_0 a_1^2 + 2c_1 a_0 a_1 = -2^2 - 2*3*2 = -16 \tag{80}$$

$$C_1 = 2c_0 a_0 a_1 + c_1 a_0^2 = 2*3*2 + 3^2 = 21 \tag{81}$$

$$C_0 = c_0 a_0^2 = -3^2 = -9 \tag{82}$$

$$A_3 = C_3 (m+1) = 4*2 = 8 \tag{83}$$

$$A_2 = C_2 (m+1) - 3C_3 = -16*2 - 3*4 = -44 \tag{84}$$

$$A_1 = C_1 (m+1) - 2C_2 - \frac{3C_3}{m+1} = 21*2 + 2*16 - 3*4/2 = 68 \tag{85}$$

$$A_0 = C_0 (m+1) - C_1 - \frac{C_2}{(m+1)} - \frac{15C_3}{(m+1)^2}$$

$$= -9*2 - 21 - \frac{-16}{2} - \frac{15*4}{2^2} = -46 \tag{86}$$

$$D(2) = C_2^2 - 3C_1 C_3 + \frac{99C_3^2}{(m+1)^2} \tag{87}$$

$$D(1) = -9C_0 C_3 + C_1 C_2 + \frac{4C_2^2 - 12C_1 C_3}{m+1} + \frac{66C_2 C_3}{(m+1)^2} + \frac{90C_3^2}{(m+1)^3} \tag{88}$$

$$D(0) = \left[C_1 + \frac{C_2}{(m+1)} + \frac{15C_3}{(m+1)^2}\right]^2 - 3C_0 C_2 - \frac{18C_0 C_3}{(m+1)} \tag{89}$$

整理以上数据得(74)

引理 4

$$\int^t \frac{y\,dy}{\ln^3 y - 5\ \ln^2 y + 2\ln y - 14} = \frac{t^2}{2\ln^3 t - 13\ \ln^2 t + 12.5\ln t - 31.25} + \frac{\leq t^2}{\ln^7 t} \tag{90}$$

证明　由(55)：(68)式，得

$$F\ (x) = \int^x \frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{3} c_J \ln^J t} = \frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{3} a_J \ln^J t} + \int^x \frac{\left[t^m \sum_{J=0}^{2} D(J) \ln^J t\right] dt}{\sum_{J=0}^{3} c_J \ln^J t \left(\sum_{J=0}^{3} a_J \ln^J t\right)^2}$$

$$=\frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{3} a_J \ln^J t}+\frac{x^{m+1} D(2)}{c_3 a_3^2 \ln^7 x}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^8 x}\right)$$

$$F\ (x)=\int^{x}\frac{t^m dt}{\ln t}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\ln x-1}$$

$$+\frac{x^{m+1}}{(m+1)^3 \ln^3 x-5(m+1)^2 \ln^2 x+2(m+1)\ln t-14}+O\left(\frac{x^{m+1}}{\ln^7 x}\right)$$

$$a_3=c_3(m+1)=2$$

$$a_2=c_2(m+1)-3c_3=-5*2-3=-13$$

$$a_1=c_1(m+1)-2c_2-\frac{3c_3}{m+1}=2*2+2*5-3/2=12.5$$

$$a_0=c_0(m+1)-c_1-\frac{c_2}{(m+1)}-\frac{15c_3}{(m+1)^2}=-14*2-2-\frac{-5}{2}-\frac{15}{2^2}=-31.25$$

$$D(2)=c_2^2-3c_1c_3+\frac{99c_3^2}{(m+1)^2}$$

$$D(1)=-9c_0c_3+c_1c_2+\frac{4c_2^2-12c_1c_3}{m+1}+\frac{66c_2c_3}{(m+1)^2}+\frac{90c_3^2}{(m+1)^3}$$

$$D(0)=\left[c_1+\frac{c_2}{(m+1)}+\frac{15c_3}{(m+1)^2}\right]^2-3c_0c_2-\frac{18c_0c_3}{(m+1)}$$

整理以上数据得(90)，证毕

定理 11

$$\mathrm{U}_1(t)=\frac{t^2}{2\ln t-3}+\frac{5t^2}{8\ln^3 t}+\frac{63t^2}{16\ln^4 t}+\frac{^{\le}t^2}{\ln^5 t}=\frac{t^2}{2\ln t-3}+\frac{5t^2}{8\ln^3 t}+\frac{^{1}63t^2}{16\ln^4 t} \quad (91)$$

证明　　由(75) 及(55) ：(68) 式，得

$$\mathrm{U}_1(t)=\int_3^t li(y)\,dy=\int^t\left\{\frac{y}{\ln y-1}+\frac{y}{\ln^3 y-5\ \ln^2 y+2\ln y-14}\right\}dy$$

$$=\frac{t^2}{2\ln t-3}+\frac{t^2}{8\ln^3 t-44\ln^2 t+68\ln t-46}+\frac{t^2}{2\ln^3 t-13\ \ln^2 t+12.5\ln t-31.25}+\frac{^{1}t^2}{\ln^7 t}$$

$$=\frac{t^2}{2\ln t-3}+\frac{t^2}{8\ln^3 t}+\frac{44t^2}{64\ln^4 t}+\frac{t^2}{2\ln^3 t}+\frac{{}^{1}13t^2}{4\ln^4 t}=\frac{t^2}{2\ln t-3}+\frac{5t^2}{8\ln^3 t}+\frac{11t^2}{16\ln^4 t}+\frac{{}^{1}13t^2}{4\ln^4 t}$$

得(91)式。

定理 12

$$U_1\left(\frac{x}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\ln\frac{x}{2}}-\frac{1}{4\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{9}{8\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{{}^{\leq}1}{\ln^4\frac{x}{2}}\right\}li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2} \tag{92}$$

证明

$$U_1\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\ln\frac{x}{2}-3}+\frac{5\left(\frac{x}{2}\right)^2}{8\ln^3\frac{x}{2}}+\frac{{}^{1}63\left(\frac{x}{2}\right)^2}{16\ln^4\frac{x}{2}}$$

$$=\left\{1-\frac{1}{2\ln\frac{x}{2}}-\frac{7}{4\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{{}^{1}61}{8\ln^3\frac{x}{2}}\right\}\frac{li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}}{2}+\frac{5\left(\ln\frac{x}{2}-1\right)^2li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8\ln^3\frac{x}{2}}+\frac{{}^{1}63li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16\ln^2\frac{x}{2}}$$

$$=\left\{1-\frac{1}{2\ln\frac{x}{2}}-\frac{7}{4\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{{}^{1}61}{8\ln^3\frac{x}{2}}\right\}\frac{li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}}{2}+\left(1-\frac{2}{\ln\frac{x}{2}}\right)\frac{5li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8\ln\frac{x}{2}}+\frac{{}^{1}63li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16\ln^2\frac{x}{2}}$$

$$=\left\{1-\frac{1}{2\ln\frac{x}{2}}-\frac{7-5}{4\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{{}^{1}61}{8\ln^3\frac{x}{2}}\right\}\frac{li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}}{2}-\frac{10li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{{}^{1}63li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16\ln^2\frac{x}{2}}$$

$$=\left\{1-\frac{1}{2\ln\frac{x}{2}}-\frac{1}{2\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{{}^{1}61+20-63}{8\ln^3\frac{x}{2}}\right\}\frac{li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}}{2}$$

得(92)

5.3.3 $U_2(t)$ 函数近似值

定理 13

$$U_2(t)=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+3}}{x^{J+1}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y}+\frac{3J+11}{4(J+3)^2\ln^2 y}+\frac{14(J+3)^2+12J+41}{8(J+3)^3\ln^3 y}+\frac{\leq 1}{\ln^4 y}\right] \quad (93)$$

证明

$$U_2(t)=\int_3^t\frac{U_1(y)dy}{x-y}\quad=\int_3^t\left(\frac{y^2}{2\ln y-3}+\frac{{}^{1}5y^2}{8\ln^3 y}\right)\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^J}{x^{J+1}}dy$$

$$=\sum_{J=0}^{\infty}\int\frac{y^{J+2}}{x^{J+1}}\left(\frac{1}{2\ln y-3}+\frac{{}^{1}5}{8\ln^3 y}\right)dy$$

$$=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+3}}{x^{J+1}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y-3(J+3)-2}+\frac{1}{2^3(J+3)^3\ln^3 y}+\frac{{}^{1}5}{8(J+3)\ln^3 y}\right]$$

$$=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+3}}{x^{J+1}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y}+\frac{3(J+3)+2}{4(J+3)^2\ln^2 y}+\frac{[3(J+3)+2]^2+1}{8(J+3)^3\ln^3 y}+\frac{{}^{1}5}{8(J+3)\ln^3 y}\right]$$

$$=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+3}}{x^{J+1}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y}+\frac{3(J+3)+2}{4(J+3)^2\ln^2 y}+\frac{[3(J+3)+2]^2+5(J+3)^2+1}{8(J+3)^3\ln^3 y}+\frac{\leq 1}{\ln^4 y}\right]$$

$$=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+3}}{x^{J+1}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y}+\frac{3J+11}{4(J+3)^2\ln^2 y}+\frac{14(J+3)^2+12(J+3)+5}{8(J+3)^3\ln^3 y}+\frac{\leq 1}{\ln^4 y}\right]$$

整理上式，得本定理结果

定理 14

$$U_2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{A_{2.1}}{2\ln\frac{x}{2}}-\frac{A_1-2A_{2.2}}{4\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}}{8\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{\leq 1}{\ln^4 y}\right]li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln^2\frac{x}{2}$$

其中，

$$\left(A_{2.K}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{2^J(J+3)^k}\ ,\ \begin{matrix}A_{2.1}=0.54344\\ A_{2.2}=0.157925\end{matrix}\ ,\ A_{2.3}=0.047705\right) \quad (94)$$

$$U_2\left(\frac{x}{2}\right)=\left[\frac{0.54344}{2\ln\frac{x}{2}}-\frac{0.22759}{4\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{4.13089}{8\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{\leq 1}{\ln^4 y}\right]\frac{li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln^2\frac{x}{2}}{2} \quad (95)$$

证明

$$\frac{U_2\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln^2\frac{x}{2}}=\frac{\left(\ln\frac{x}{2}-1\right)^2}{\left(1+\ln^{-3}\frac{x}{2}\right)^2\ln^2\frac{x}{2}}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{2^{J+1}}$$

$$\left[\frac{1}{2(J+3)\ln\frac{x}{2}}+\frac{3J+11}{4(J+3)^2\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{14(J+3)^2+12J+41}{8(J+3)^3\ln^3\frac{x}{2}}+\frac{\overset{\le}{}1}{\ln^4 y}\right]$$

$$=\frac{\left(1-2\ln^{-1}\frac{x}{2}+\ln^{-2}\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\ln^{-3}\frac{x}{2}\right)^2}\left[\frac{C_{2,1}}{\ln\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,2}}{\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,3}}{\ln^3\frac{x}{2}}+\frac{\overset{\le}{}1}{\ln^4 y}\right]$$

$$=\left[\frac{C_{2,1}}{\ln\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,2}}{\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,3}}{\ln^3\frac{x}{2}}-\frac{2C_{2,1}}{\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{2C_{2,2}}{\ln^3\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,1}}{\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{\overset{\le}{}1}{\ln^4 y}\right]$$

$$=\left[\frac{C_{2,1}}{\ln\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,2}-2C_{2,1}}{\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{C_{2,3}-2C_{2,2}+C_{2,1}}{\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{\overset{\le}{}1}{\ln^4 y}\right]\ln^2\frac{x}{2}$$

$$=\left[\frac{C_{2,1}}{\ln\frac{x}{2}}+\frac{D_{2,2}}{\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{D_{2,3}}{\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{\overset{\le}{}1}{\ln^4 y}\right]\ln^2\frac{x}{2}$$

$$C_{2,1}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{2^{J+2}(J+3)}=\frac{A_{2,1}}{4}=\frac{0.54344}{4}$$

$$C_{2,2}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{3J+11}{2^{J+3}(J+3)^2}=\frac{1}{8}\sum_{J=0}^{\infty}\left[\frac{3}{2^J(J+3)}+\frac{2}{2^J(J+3)^2}\right]=\frac{3A_{2,1}+2A_{2,2}}{8}$$

$$C_{2,3}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{14(J+3)^2+12J+41}{2^{J+4}(J+3)^3}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{14(J+3)^2+12(J+3)+5}{2^{J+4}(J+3)^3}$$

$$=\sum_{J=0}^{\infty}\left[\frac{14(J+3)^2}{2^{J+4}(J+3)^3}+\frac{12(J+3)}{2^{J+4}(J+3)^3}+\frac{5}{2^{J+4}(J+3)^3}\right]=\frac{14A_{2,1}+12A_{2,2}+5A_{2,3}}{16}$$

$$D_{2,2}=C_{2,2}-2C_{2,1}=\frac{3A_{2,1}+2A_{2,2}}{8}-\frac{2A_{2,1}}{4}=-\frac{A_{2,1}-2A_{2,2}}{8}=-\frac{0.22759}{8}$$

$$D_{2,3}=C_{2,3}-2C_{2,2}+C_{2,1}=\frac{14A_{2,1}+12A_{2,2}+5A_{2,3}}{16}-2\frac{3A_{2,1}+2A_{2,2}}{8}+\frac{A_{2,1}}{4}$$

$$=\frac{14A_{2,1}+12A_{2,2}+5A_{2,3}}{16}-\frac{12A_{2,1}+8A_{2,2}}{16}+\frac{4A_{2,1}}{16}=\frac{6A_{2,1}+4A_{2,2}+5A_{2,3}}{16}=\frac{4.13089}{16}$$

$$A_{2.1}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)2^{J}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{48}+\frac{1}{112}+\frac{1}{256}+\frac{1}{576}+\frac{1}{1280}+\frac{1}{2816}+\frac{1}{6144}+\frac{1}{13312}+\frac{1}{28672}+\ldots\ldots$$

$$=0.5433757+\frac{1}{28672}+\frac{1}{61440}+\frac{1}{131072}+\ldots\ldots=0.5434345+\frac{1}{278528}+\ldots\ldots=0.54344$$

$$A_{2.2}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)^{2}2^{J}}=\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}2}+\frac{1}{5^{2}2^{2}}+\frac{1}{6^{2}2^{3}}+\frac{1}{7^{2}2^{4}}+\frac{1}{8^{2}2^{5}}+\frac{1}{9^{2}2^{6}}+\frac{1}{10^{2}2^{7}}$$

$$+\frac{1}{11^{2}2^{8}}+\frac{1}{12^{2}2^{9}}+\frac{1}{13^{2}2^{10}}+\frac{1}{14^{2}2^{11}}+\frac{1}{15^{2}2^{12}}\ldots\ldots$$

$$A_{2.2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{32}+\frac{1}{100}+\frac{1}{288}+\frac{1}{784}+\frac{1}{2048}+\frac{1}{5184}+\frac{1}{12800}$$

$$+\frac{1}{30976}+\frac{1}{73728}+\frac{1}{173056}+\frac{1}{401408}+\left(1-\frac{1}{2.3}\right)^{-1}\frac{1}{921600}\quad 0.157925$$

$$A_{2.3}=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)^{3}2^{J}}=\frac{1}{3^{3}}+\frac{1}{4^{3}2}+\frac{1}{5^{3}2^{2}}+\frac{1}{6^{3}2^{3}}+\frac{1}{7^{3}2^{4}}+\frac{1}{8^{3}2^{5}}+\frac{1}{9^{3}2^{6}}+\frac{1}{10^{3}2^{7}}+\frac{1}{11^{3}2^{8}}+\ldots$$

$$=\frac{1}{27}+\frac{1}{128}+\frac{1}{500}+\frac{1}{1728}+\frac{1}{5488}+\frac{1}{16384}+\frac{1}{46656}+\frac{1}{128000}+\left(1-\frac{1}{2.7}\right)^{-1}\frac{1}{340736}$$

整理上式即可

5.3.4 $U_3(t)$ 函数近似值

定理 15 $$U_3(t)=\int_3^t\frac{U_2(y)dy}{x-y}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+4}}{x^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln y}+\frac{2(J+3)+^{1}(3J+11)(J+k+4)}{4(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}\ln^{2}y}\right]\quad(96)$$

证明 由(75)：(93)式，得

$$U_3(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_3^t U_2(y)\frac{y^{k}dy}{x^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_3^t\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+3}}{x^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y}+\frac{^{1}3J+11}{4(J+3)^{2}\ln^{2}y}\right]dy$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\int_3^t\frac{y^{J+k+3}}{x^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)\ln y}+\frac{^{1}3J+11}{4(J+3)^{2}\ln^{2}y}\right]dy$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+4}}{x^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)\left[(J+k+4)\ln y-1\right]}+\frac{^{1}3J+11}{4(J+3)^{2}(J+k+4)\ln^{2}y}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+4}}{x^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln y}+\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)^{2}\ln^{2}y}\right.$$

$$\left.+\frac{{}^{1}3J+11}{4(J+3)^{2}(J+k+4)\ln^{2}y}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+4}}{x^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln y}+\frac{2(J+3)+^{1}(3J+11)(J+k+4)}{4(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}\ln^{2}y}\right]$$

得(96)式

定理 16

$$U_{3}\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\ln\frac{x}{2}}{2^{J+k+3}}\left[\frac{1}{J+k+4}+\frac{(J+3)-^{1}(J+1)(J+k+4)}{(J+3)(J+k+4)^{2}}\right]\frac{1li^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}{J+3} \qquad (97)$$

$$U_{3}\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{A_{3.1}}{8\ln^{2}\frac{x}{2}}+\frac{{}^{1}C_{3.2}}{16\ln^{3}\frac{x}{2}}\right)1i^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\ln^{3}\frac{x}{2}=\left(\frac{0.20812}{8\ln^{2}\frac{x}{2}}-\frac{{}^{1}0.01255}{16\ln^{3}\frac{x}{2}}\right)1i^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\ln^{3}\frac{x}{2} \qquad (98)$$

证明　由(96)式，得

$$\frac{U_{3}\left(\frac{x}{2}\right)}{li^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\left(\ln\frac{x}{2}-1\right)^{2}}{2^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln\frac{x}{2}}+\frac{2(J+3)+^{1}(3J+11)(J+k+4)}{4(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}\ln^{2}\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\ln^{2}\frac{x}{2}}{2^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln\frac{x}{2}}\left(1-\frac{2}{\ln\frac{x}{2}}\right)+\frac{2(J+3)+^{1}(3J+11)(J+k+4)}{4(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}\ln^{2}\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\ln^{2}\frac{x}{2}}{2^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln\frac{x}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{2(J+3)+^{1}(3J+11)(J+k+4)-4(J+3)(J+k+4)}{4(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}\ln^{2}\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\ln^{2}\frac{x}{2}}{2^{J+k+2}}\left[\frac{1}{2(J+3)(J+k+4)\ln\frac{x}{2}}+\frac{2(J+3)-^{1}(J+1)(J+k+4)}{4(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}\ln^{2}\frac{x}{2}}\right]$$

由上式得(97)式。

$$A_{3.1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(J+k+4)2^{J+K}}=0.208120$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2}{(J+3)(J+k+4)^{2}2^{J+K}}=0.08455$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(J+k+4)2^{J+K}}=0.23101$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2}{(J+3)^{2}(J+k+4)2^{J+K}}=0.133905$$

$$C_{3.2}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2(J+3)-(J+1)(J+k+4)}{(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}2^{J+K}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2}{(J+3)(J+k+4)^{2}2^{J+K}}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(J+k+4)2^{J+K}}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2}{(J+3)^{2}(J+k+4)2^{J+K}}$$

$$=0.08455-0.23101+0.133905=-0.01255$$

整理上面数据得(98)式

5.3.5 $U_4(t)$ 函数的近似值

定理 17

$$U_4(t)=\int_3^t\frac{U_3(y)dy}{x-y}=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+L+5}}{x^{J+k+L+3}}\frac{{}^{1}1}{2(J+3)(J+k+4)(J+k+L+5)\ln t}\qquad(99)$$

证明　由(75)：(96)式，得

$$U_4(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_3^t U_3(y)\frac{y^m dy}{x^{m+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\int_3^t\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{y^{J+k+m+4}}{x^{J+k+m+3}}\frac{{}^{1}dy}{2(J+3)(J+k+4)\ln y}$$

$$=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\int_3^t\frac{y^{J+k+L+4}}{x^{J+k+L+3}}\frac{{}^{1}dy}{2(J+3)(J+k+4)\ln y}$$

得(99)式

定理 18

$$\frac{\mathrm{U}_4\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln\frac{x}{2}}=\int_3^{\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{U}_3(y)dy}{(x-y)\,\mathrm{n}\frac{x}{2}} ={}^1 D_{4.1}li^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{{}^1 0.06150li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16}=\frac{{}^1 C_{4.1}li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16} \qquad (100)$$

$$D_{4.1}=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(\mathrm{J}+k+4)(\mathrm{J}+k+L+5)\,2^{\mathrm{J}+k+L+4}}=\frac{0.06150}{16} \qquad (101)$$

证明　由(99)式，得

$$\mathrm{U}_4\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mathrm{J}+k+L+5}}{\mathrm{x}^{\mathrm{J}+k+L+3}}\frac{{}^1 1}{2(J+3)(\mathrm{J}+k+4)(\mathrm{J}+k+L+5)\ln\frac{x}{2}}$$

$$=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\mathrm{J}+k+L+3}}\frac{{}^1 li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}}{2(J+3)(\mathrm{J}+k+4)(\mathrm{J}+k+L+5)}={}^1 D_{4.1}li^2\left(\frac{x}{2}\right)\ln\frac{x}{2}$$

得(100)式。

$$D_{4.1}=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(\mathrm{J}+k+4)(\mathrm{J}+k+L+5)\,2^{\mathrm{J}+k+L+4}}=\frac{0.06150}{16}$$

得(101)式

5.3.6 $\mathrm{U}_{\mathrm{k}}(0.5x)$ 的阶

定理 19

$$\mathrm{U}_{\mathrm{k}}\left(\frac{x}{2}\right)=\int_3^{\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{U}_{k-1}(y)dy}{x-y}=O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right) \qquad (102)$$

证明　使用归纳法证明如下，由(75)得

$$\mathrm{U}_1\left(\frac{x}{2}\right)=\int_3^{0.5x}li(y)\,dy=\int_3^{0.5x}O\left(\frac{y}{\ln y}\right)dy=O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)$$

此时，本定理成立。设

$$\mathrm{U}_{\mathrm{k-1}}\left(\frac{x}{2}\right)=\int_3^{0.5x}\frac{\mathrm{U}_{k-2}(y)dy}{x-y}=O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)$$

成立，则

$$\mathrm{U}_k\left(\frac{x}{2}\right)=\int_3^{0.5x}\frac{\mathrm{U}_{k-1}(y)\,dy}{x-y}=O\left(\int_3^{0.5x}O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)\frac{dy}{x-y}\right)=O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)$$

本定理仍成立

5.4 $\int^{0.5x} li(t)\ln^{-S}(x-t)\,dt$ 的近似积分值

引理 5

$$-\sum_{J=1}^{2}\frac{(J-1)!\,\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\ln\frac{x}{2}}-\frac{1}{4\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{9}{8\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{{}^{\le}1}{\ln^4\frac{x}{2}}\right\}li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-\left(\frac{A_{2.1}}{4\ln\frac{x}{2}}-\frac{A_{2.1}-2A_{2.2}}{8\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}}{16\ln^3\frac{x}{2}}\pm\frac{{}^{\le}1}{\ln^4 y}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)\qquad(102)$$

证明　由(92)：(94)式，得本引理成立

引理 6

$$-\sum_{J=3}^{4}\frac{(J-1)!\,\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}=\left(\frac{A_{3.1}}{8\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{C_{3.2}-C_{4.1}}{16\ln^3\frac{x}{2}}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)\qquad(104)$$

证明　由(98)：(100)式，得

$$-\sum_{J=3}^{4}\frac{(J-1)!\,\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}=\left(\frac{A_{3.1}}{8\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{{}^{1}C_{3.2}}{16\ln^3\frac{x}{2}}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{C_{4.1}\,li^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16\ln^3\frac{x}{2}}$$

$$=\left(\frac{A_{3.1}}{8\ln^2\frac{x}{2}}+\frac{C_{3.2}-C_{4.1}}{16\ln^3\frac{x}{2}}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

得本定理，证毕

引理 7

$$-\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(J-1)!\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}=-\sum_{J=1}^{2}\frac{(J-1)!\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}-{}^{1}\sum_{J=3}^{4}\frac{(J-1)!\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}\qquad(105)$$

证明　由(102)式，即

$$\mathrm{U}_{\mathrm{k}}\left(\frac{x}{2}\right)=\int^{\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{U}_{k-1}(y)dy}{x-y}=O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)$$

得

$$\sum_{J=5}^{\infty}\frac{(J-1)!\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}=\sum_{J=5}^{\infty}\frac{(J-1)!O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}=O\left(\sum_{J=5}^{\infty}(J-1)!\frac{x^2}{\ln^{J+1}x}\right)=O\left(\frac{x^2}{\ln^5 x}\right)$$

显然本引理成立

定理 20

$$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{li(t)}{\ln(x-t)}dt=-\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(J-1)!\mathrm{U}_J\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(-\ln\frac{x}{2}\right)^J}\qquad(106)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1+A_{2.1}}{4\ln\frac{x}{2}}-\frac{2-A_{2.1}+2A_{2.2}-A_{3.1}}{8\ln^2\frac{x}{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{{}^{1}18+6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}-C_{3.2}-C_{4.1}}{\ln^3\frac{x}{2}}\right\}li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}-\frac{0.38586}{\ln\frac{x}{2}}-\frac{0.19554}{\ln^2\frac{x}{2}}-\frac{{}^{1}1.38624}{\ln^3\frac{x}{2}}\right\}li^2\left(\frac{x}{2}\right)\qquad(107)$$

$$A_{2.K}=\sum_{\mathrm{J}=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\mathrm{J}}(\mathrm{J}+3)^k},\quad A_{2.1}=0.54344,\ A_{2.2}=0.157925,\quad A_{2.3}=0.047705=\frac{\pm 1}{21}\qquad(108)$$

$$A_{2.1}-2A_{2.2}=0.22759,\quad 6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}=4.13089\qquad(109)$$

$$A_{3.1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(\mathrm{J}+k+4)2^{\mathrm{J}+K}}=0.20812\qquad(110)$$

$$C_{3.2}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2(J+3)-^{1}(J+1)(J+k+4)}{(J+3)^{2}(J+k+4)^{2}2^{J+K}}=0.01255 \quad (111)$$

$$C_{4.1}=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(J+k+4)(J+k+L+5)2^{J+k+L}}=0.06150 \quad (112)$$

证明 $$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{li(t)}{\ln(x-t)}dt=\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{dU_1(t)}{\ln(x-t)}=\frac{U_1(0.5x)}{\ln^1 0.5x}-\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{U_1(t)dt}{(x-t)\ln^2(x-t)}$$

$$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{U_1(t)dt}{(x-t)\ln^2(x-t)}=\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{dU_2(t)}{\ln^2(x-t)}=\frac{U_2(0.5x)}{\ln^2 0.5x}-\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{2U_2(t)dt}{(x-t)\ln^3(x-t)}$$

$$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{2U_2(t)dt}{(x-t)\ln^3(x-t)}=\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{2dU_3(t)}{\ln^3(x-t)}=\frac{2U_3(0.5x)}{\ln^3 0.5x}-\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{3!U_3(t)dt}{(x-t)\ln^4(x-t)}$$

$$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{3!U_3(t)dt}{(x-t)\ln^4(x-t)}=\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{3!dU_4(t)}{\ln^4(x-t)}=\frac{3!U_4(0.5x)}{\ln^4 0.5x}-\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{4!U_4(t)dt}{(x-t)\ln^5(x-t)}$$

....

$$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{li(t)}{\ln(x-t)}dt=\frac{U_1(0.5x)}{\ln^1 0.5x}-\frac{U_2(0.5x)}{\ln^2 0.5x}+\frac{2U_3(0.5x)}{\ln^3 0.5x}-........=-\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(J-1)!U_J(0.5x)}{(-\ln 0.5x)^J}$$

由(103)：(105)式，得

$$\int_{3}^{\frac{x}{2}}\frac{li(t)}{\ln(x-t)}dt=-\sum_{J=1}^{4}\frac{(J-1)!U_J(0.5x)}{(-\ln 0.5x)^J}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1+A_{2.1}}{4\ln 0.5x}-\frac{2-A_{2.1}+2A_{2.2}}{8\ln^2 0.5x}-\frac{18+6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}}{16\ln^3 0.5x}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{A_{3.1}}{8\ln^2 0.5x}+\frac{C_{3.2}-C_{4.1}}{16\ln^3 0.5x}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1+A_{2.1}}{4\ln 0.5x}-\frac{2-A_{2.1}+2A_{2.2}-A_{3.1}}{8\ln^2 0.5x}-\frac{^1 18+6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}-C_{3.2}+C_{4.1}}{16\ln^3 0.5x}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1+0.54344}{4\ln 0.5x}-\frac{2-0.22759-0.20812}{8\ln^2 0.5x}-\frac{^1 18+4.13089-0.01255+0.06150}{16\ln^3 0.5x}\right)li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}-\frac{0.38586}{\ln 0.5x}-\frac{0.19554}{\ln^2 0.5x}-\frac{^1 1.38624}{\ln^3 0.5x}\right\}li^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

其中

$A_{2.1} - 2A_{2.2} = 0.22759$, $6A_{2.1} + 4A_{2.2} + 5A_{2.3} = 4.13089$

第六章 哥德巴赫猜想

本章对哥德巴赫猜想 “1+1”问题作定量分析——计算哥德巴赫分析解，并进行推广。这个问题以前的最好结果，是1967年陈景润先生对哥德巴赫猜想 “1+2”问题作定性分析

引用一段来自网上（网址：http://baike.baidu.com/view/90415.htm）的短文：

哥德巴赫猜想意义

“用当代语言来叙述，哥德巴赫猜想有两个内容，第一部分叫做奇数的猜想，第二部分叫做偶数的猜想。奇数的猜想指出，任何一个大于等于7的奇数都是三个奇（“奇”fangfangma所加，好像大部分网站都有“奇”）素数的和。偶数的猜想是说，大于等于4的偶数一定是两个奇（“奇”fangfangma所加，好像大部分网站都有“奇”）素数的和。”（引自《哥德巴赫猜想与潘承洞》）

关于歌德巴赫猜想的难度我就不想再说什么了，我要说一下为什么现代数学界对歌德巴赫猜想的兴趣不大，以及为什么中国有很多所谓的民间数学家对歌德巴赫猜想研究兴趣很大。

事实上，在1900年，伟大的数学家希尔伯特在世界数学家大会上作了一篇报告，提出了23个挑战性的问题。歌德巴赫猜想是第八个问题的一个子问题，这个问题还包含了黎曼猜想和孪生素数猜想。现代数学界中普遍认为最有价值的是广义黎曼猜想，若黎曼猜想成立，很多问题就都有了答案，而歌德巴赫猜想和孪生素数猜想相对来说比较孤立，若单纯的解决了这两个问题，对其他问题的解决意义不是很大。所以数学家倾向于在解决其它的更有价值的问题的同时，发现一些新的理论或新的工具，“顺便”解决歌德巴赫猜想。

例如：一个很有意义的问题是：素数的公式。若这个问题解决，关于素数的问题应该说就不是什么问题了。

为什么民间数学家们如此醉心于哥猜，而不关心黎曼猜想之类的更有意义的问题呢？一个重要的原因就是，黎曼猜想对于没有学过数学的人来说，想读明白是什么意思都很困难。而歌德巴赫猜想对于小学生来说都能读懂。

数学界普遍认为，这两个问题的难度不相上下。

民间数学家解决歌德巴赫猜想大多是在用初等数学来解决问题，一般认为，初等数学无法解决歌德巴赫猜想。退一步讲，即使那天有一个牛人，在初等数学框架下解决了歌德巴赫猜想，有什么意义呢？这样解决，恐怕和做了一道数学课的习题的意义差不多了。

当年柏努力兄弟向数学界提出挑战，提出了最速降线的问题。牛顿用非凡的微积分技巧解出了最速降线方程，约翰·柏努力用光学的办法巧妙的也解出最速降线方程，雅克布·柏努力用比较麻烦的办法解决了这个问题。虽然雅克布的方法最复杂，但是在他的方法上发展出了解决这类问题的普遍办法——变分法。现在来看，雅克布的方法是最有意义和价值的。

同样，当年希尔伯特曾经宣称自己解决了费尔马大定理，但却不公布自己的方法。别人问他为什么，他回答说：“这是一只下金蛋的鸡，我为什么要杀掉它？”的确，在解决费尔马大定理的历程中，很多有用的数学工具得到了进一步发展，如椭圆曲线、模形式等。

所以，现代数学界在努力的研究新的工具，新的方法，期待着哥德巴赫猜想这个“下金蛋的鸡”能够催生出更多的理论。

《概率素数论》就是哥德巴赫猜想这个“下金蛋的鸡”，催生出的一个理论。虽作者仍未彻底解决哥猜，却意外收获一个理论

6.1 哥德巴赫方程

定义 1 将下面由素数 p_i 构成的素数方程，称为 u 次 s 维哥德巴赫方程

$$p_1^u + p_2^u + \cdots\cdots p_s^u = N = 2n + s \bmod 2 \quad \left(3 \le p_{i-1} \le p_i\right) \tag{1}$$

它是哥德巴赫猜想：偶数可表为两素数之和

$$p_1 + p_2 = N = 2n \quad \left(3 \le p_1 \le p_2\right)$$

的一般数学表达一般形式，先研究 $u=1$ 的 s 维哥德巴赫方程

6. 1.1 哥德巴赫数

定义 2 将满足哥德巴赫方程 (1) 的素数组 $\left\{p_i\right\}$ 的不同组合个数，即德巴赫分析解数，称为 s 维哥德巴赫数，简称 s 维哥数或哥数，记为 $g_s(N)$ 、$G_s(N)$ ，$s=2$ 时，简称偶哥数，$s=3$ 时，简称奇哥数

6. 1.2 哥德巴赫数定理

定义 3 将 $N \le x$ 的哥数 $g_s(N)$ 、$G_s(N)$ 之和，称为 s 维哥德巴赫数定理，简称哥数定理，记为 $\pi(x,g_s)$ 、$\Pi(x,g_s)$ ，即

$$\pi(x,g_s) = \sum_{n=0}^{0.5x-1.5s} g_s(2n+3s) =^1 \Pi(x,g_s) \tag{2}$$

定理 1

$$g_s(x) = \pi(x,g_s) - \pi(x-2,g_s) \tag{3}$$

$$G_s(x) = 2\frac{\partial}{\partial x}\Pi(x,g_s) =^1 g_s(x) \tag{4}$$

$$\Pi(x,g_s) = 0.5\int^x G_s(t)\,dt =^1 \pi(x,g_s) \tag{5}$$

证明　由定义 3 中的 (2) 式得

$$\pi(x,g_s) = \sum_{n=0}^{0.5x-1.5s} g_s(2n+3s) = g_s(x) + \sum_{n=0}^{0.5x-1.5s-1} g_s(2n+3s) = g_s(x) + \pi(x-2,g_s)$$

整理上式，得 (3) 式，写出与上式相对应的理论值表达式，并作一阶偏导展开，得

$$\Pi\left(x,g_s\right)=G_s\left(x\right)+^1\Pi\left(x-2,g_s\right)=G_s\left(x\right)+\Pi\left(x,g_s\right)-2^1\frac{\partial}{\partial x}\Pi\left(x,g_s\right)$$

整理上式，得(4)、(5)式。

6. 1.3 哥德巴赫 6 个命题

德国人哥德巴赫在 1742 年给大数学家欧拉的信中，提出整数表为素数之和的两个猜想：
≥6 的每一个偶数都是两个奇素数之和；
≥9 的每一个奇数都是 3 个奇素数之和；

这是世界著名的数学难题哥德巴赫猜想。因为前者成立，后者也成立，故“1＋1”成了哥德巴赫猜想的代号。王元院士将“1＋1”归纳为以下前 5 个命题[2] P 53，笔者增加一个命题，将“1＋1”简叙如下

(A) 每一大于 6 的偶数 N 都是两个奇素数之和
(B) 每一大于 9 的奇数 N，都是三个奇素数之和
(C) 大于 2 的整数 N，都可以表为不超过 S 个素数之和

哈代与李特伍德（Hardy-Littlewood）在 1922 年还进一步猜测：

(D) 偶数 N 为两奇素数和的表法个数$g_2\left(N\right)$，则

$$g_2\left(N\right)=2\prod_{\substack{p|N\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{\left(p-2\right)^2}\right)\frac{N}{\ln^2 N}\left(1+O\left(1\right)\right)\quad\left(2\,|\,N\right)\qquad(6)$$

(E) 奇数 N，表为三奇素数和的表法个数$g_3\left(N\right)$

$$g_3\left(N\right)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p|N\\p>2}}\left(1-\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right)\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{\left(p-1\right)^3}\right)\frac{N^2}{\ln^3 N}\left(1+O\left(1\right)\right)\quad\left(N\bmod 2=1\right)\qquad(7)$$

(F) 自然数 N，表为 s 个素数之和的表法个数，记为$g_s\left(N\right)$

王元院士进一步指出[2] P55： 命题（A）、（B）是哥德巴赫问题原始的算术语言提法，而命题（D）、（E）是哥德巴赫问题的分析语言的提法，命题（D）、（E）比命题（A）、（B）更加深刻，由它们不仅能推出对于充分大的整数，命题（A）、（B）都成立，而且给出了充分大的整数表为素数和的表法个数的渐近公式

下面将计算$g_2\left(N\right)$、$g_3\left(N\right)$两个公式，并证明哈代与李特伍德（Hardy-Littlewood）猜想的上述命题（D）、（E）中，两个公式阶的正确性

下面解决这 6 个命题

前面的边界问题、素数定理，均有两种方法求解，下面的偶哥数仍有多种方法求解

6. 1.4 偶哥德巴赫数平均计算法

定理 2 将哥德巴赫问题暂作非均分问题（下同），得

$$g_2(N) = ^{\pm} C\frac{4}{N}\pi\left(\frac{N}{2}\right)\left[\pi(N)-\pi\left(\frac{N}{2}\right)\right] = ^{\pm}CNP^2\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{^{\pm}CN}{\ln^2 N} \quad (8)$$

证明 求解素数方程(1)的偶哥数$g_2(N)$，等价于变量(x,y)取自然数时，统计下面不定方程

$$x+y=N \qquad (3\le x\le 0.5N)$$

中，x 和 y 同时是素数时，素数组(x,y)的不同组合个数。 x 在$(3,0.5N)$内逐个取奇数$2i+1$时，x 和$y=N-x$各自及同时，出现素数的频率、概率及平均频率等，记为$\rho(x)$、$\rho(y)$、$\rho(x,y)$、$P(x)$、$P(y)$、$P(x,y)$、$\overline{\rho}(x)$、$\overline{\rho}(y)$、$\overline{\rho}(x,y)$，因 x 和$y=N-x$同时是奇数，其素数率是自然数的 2 倍，x 的奇数在$(3,0.5N)$内的取值个数是$0.25N$，将 x 与 y 的素数率$P(x)$、$P(y)$的相关系数记为$^{\pm}C$（暂作非均分问题处理，下同），得

$$\overline{\rho}(x=2i+1) = \frac{^{1}\pi(0.5N)}{0.25N}$$

$$\overline{\rho}(y=N-x=N-2i-1) = \overline{\rho}(N-2i-1) = \frac{^{1}\left[\pi(N)-\pi(0.5N)\right]}{0.25N}$$

$$g_2(N) = \sum_{\substack{x=3\\y=N-x}}^{0.5N}\rho(x,y) = ^{\pm}C\sum_{\substack{x=3\\y=N-x}}^{0.5N}\rho(x)\rho(y)$$

$$= ^{\pm}C\sum_{i=1}^{0.25N}\overline{\rho}(x=2i+1)\,\overline{\rho}(y=N-x=N-2i-1)$$

$$= ^{\pm}C\frac{\pi(0.5N)}{0.25N}\frac{\left[\pi(N)-\pi(0.5N)\right]}{0.25N}\frac{N}{4} = ^{\pm}C\frac{4}{N}\pi\left(\frac{N}{2}\right)\left[\pi(N)-\pi\left(\frac{N}{2}\right)\right]$$

整理上式得定理中$g_2(N)$的表达式

1983 年春，在迷茫中，想起了徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》，此时激发了我用已有知识攻克它的热情。思索三个月后，萌生了与上述证明表述略有不同（用了出现素数的平均比例，即后来定义的平均素数频率），在实质及过程相同的算法，并与手工计算范围较小的实际数据相符合，这些极大地鼓励我要沿着这条不符传统数学思想的思路算下去

6. 1.5 偶哥德巴赫数概素计算法

定理 3 偶哥数概素计算法仍可得

$$g_2(N) =^{\pm} C\frac{N}{2}P^2\left(\frac{N}{2}\right) =^{\pm} C\frac{N}{\ln^2 N} \qquad (9)$$

证明 在整数方程

$$x+y=N \qquad (3\le x\le 0.5N)$$

中，x、y 出现素数的概率的相关系数记为 $^{\pm}C$，x 在定义域（3，0.5N））内取值时，x 及 y 分别及同时出现素数的概率记为 $P(x)$ 、$P(y)$ 、$P(x,y)$，因 x 是奇数时 y 必是奇数，奇数的素数率是自然数的两倍，得

$$P(x,y)=2^{\pm}CP(x)P(y)=2^{\pm}CP(x)P(N-x)=\frac{2^{\pm}C}{\ln x\ln(N-x)}$$

$$g_2(N)=^{1}\int^{0.5N}P(x,y)\,dx=\int^{0.5N}\frac{2^{\pm}Cdx}{\ln x\ln(N-x)}=2^{\pm}CNP^2\left(\frac{N}{2}\right)=2^{\pm}C\frac{N}{\ln^2 N}$$

得本定理 $g_2(N)$ 的表达式

6. 1.6 偶哥德巴赫数随机计算法

定理 4 足够大的偶数 N 的偶哥数记为 $g_2(N)$ 、$G_2(N)$，则

$$g_2(N)=^{1}G_2(N)=^{\pm}CNP^2\left(\frac{N}{2}\right)=\frac{^{\pm}CN}{\ln^2 N} \qquad (10)$$

证明 在整数方程

$$x+y=N \qquad (3\le x\le 0.5N) \qquad (11)$$

中，x、y 出现素数的概率独立，把对应每个 x 值构成的数组 (x,y)，同时是素数的现象，看成随机事件 $\xi(x,y)$，则

$$g_2(N)=\sum_{x=3}^{0.5N}\xi_x \qquad (12)$$

并将 $\xi(x,y)$ 同时出现素数的概率 P（x，y），近似成 x 在其定义域 $(3,0.5N)$ 内的平均素率 $\overline{P}(x,y)$，它是 x、y 的 自然数素数率之积的两倍，即

$$\overline{P}(x,y)=^{1}\int^{0.5N}\frac{P(x,y)}{0.5N}dx=^{1}\int^{0.5N}\frac{P(x,N-x)}{0.5N}dx=^{1}\int^{0.5N}\frac{2^{\pm}CP(x)P(N-x)}{0.5N}dx$$

$$=^{\pm}C\frac{4}{N}\int^{0.5N}P\left(\frac{N}{4}\right)P\left(\frac{3N}{4}\right)dx=2^{\pm}CP\left(\frac{N}{4}\right)P\left(\frac{3N}{4}\right)=2^{\pm}CP^{2}\left(\frac{N}{2}\right)$$

试验次数为 $0.5N$ 的等几率贝努里试验模型，进行近似求解，得

$$g_2(N)=^{1}G_2(N)=^{1}\frac{N}{2}\overline{P}(x,y)=\frac{N}{2}2^{\pm}CP^{2}\left(\frac{N}{2}\right)=^{\pm}C\frac{N}{\ln^{2}N}$$

得 (10) ，证毕

6. 1.7 s 维哥德巴赫数

定义 4 令

$$H(u,s,t_0)=\int_{t_0}^{\frac{1}{\sqrt[u]{s}}}dt_1\int_{t_1}^{\frac{1}{\sqrt[u]{s-1}}}dt_2\cdots\cdots\int_{t_{i-1}}^{\frac{1}{\sqrt[u]{s+1-i}}}dt_i\cdots\cdots\int_{t_{s-2}}^{\frac{1}{\sqrt[u]{2}}}dt_{s-1}\qquad(13)$$

$$H(u,s,t_0)=\int_{t_0}^{\frac{1}{s}}H(u,s-1,t_1)\,dt_1\qquad(14)$$

引理 1

$$H(u,s,0)=\frac{^{\pm}0.5_s^{s-1}}{\sqrt[u]{s!}}=\frac{^{\pm}C_s^{s-1}}{\sqrt[u]{s!}}\qquad(15)$$

$$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i}1=H(u,s,0)\,N^{\frac{s-1}{u}}=\frac{^{\pm}C_s^{s-1}}{\sqrt[u]{s!}}N^{\frac{s-1}{u}}\qquad\left(M_i=\sqrt[u]{\frac{N}{s+1-i}}\right)\qquad(16)$$

$$^{\pm}C_s=\sqrt[s-1]{H(u,s,0)\sqrt[u]{s!}}\qquad(17)$$

$$H(1,2,0)=0.5\quad,\qquad ^{\pm}C_2=1\qquad(18)$$

$$H(1,3,0)=\frac{1}{9}\quad,\quad ^{\pm}C_3=^{\pm}0.8165\qquad(19)$$

$$H(1,4,0)=\frac{17}{1152}\quad,\quad ^{\pm}C_4=^{\pm}0.7075\qquad(20)$$

$$H(1,5,0)=\frac{957}{7200}\quad,\qquad ^{\pm}C_5=^{\pm}0.6320\qquad(21)$$

$$H(1,6,0)=\frac{81462}{72*60^{4}}\quad,\quad ^{\pm}C_6=^{\pm}0.5760\qquad(22)$$

$$H(1,7,0)=\frac{818485298}{72*60^{4}7^{6}} \quad , \ 0.5787 =^{\pm} \tag{23}$$

数据显示$^{\pm}C_s$向$^{\pm}0.5$附近的值靠近

证明　证明过程中，在求和或积分的上下限里，为简化表达过程，均省略了一个渐近函数因子，但不影响结果。令

$$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i} 1 =^{1} \int_{t_0}^{\left(\frac{N}{s}\right)^{\frac{1}{u}}} dt_1 \int_{t_1}^{\left(\frac{N}{s-1}\right)^{\frac{1}{u}}} dt_2 \cdots\cdots \int_{t_i}^{\left(\frac{N}{s+1-i}\right)^{\frac{1}{u}}} dt_i \cdots\cdots \int_{t_{s-2}}^{\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{1}{u}}} dt_{s-1} \tag{24}$$

用积分代替求和得

$$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i} 1 =^{1} N^{\frac{s-1}{u}} H(u,s,0) \qquad \left(M_i = \sqrt[u]{\frac{N}{s+1-i}}\right) \tag{25}$$

在$H(u,s,t_0)$的定义中，变量t_i的定义域为$\left(t_{i-1}, \frac{1}{\sqrt[u]{s+1-i}}\right)$，表为变量$t_i$的边界及平均边界形式，记为：$\left({}^{\downarrow}t_i, {}^{\uparrow}t_i\right)$、$\left(\overline{{}^{\downarrow}t_i}, \overline{{}^{\uparrow}t_i}\right)$，则

$$\left.\begin{aligned} {}^{\downarrow}t_i &= t_{i-1} \\ {}^{\uparrow}t_i &= \frac{1}{\sqrt[u]{s+1-i}} \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left.\begin{aligned} \overline{{}^{\downarrow}t_i} &= \overline{t_{i-1}} \\ \overline{{}^{\uparrow}t_i} &= \frac{1}{\sqrt[u]{s+1-i}} \end{aligned}\right\}$$

t_{i-1}的定义域为$\left(t_{i-2}, \frac{1}{\sqrt[u]{s-i}}\right)$，$t_{i-1}$的平均值记为$\overline{t_{i-1}}$，则

$$\overline{t_{i-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[u]{s-i}} - t_{i-2},\right) = \frac{{}^{\pm}0.5_s}{\sqrt[u]{s-i}} = \frac{{}^{\pm}C_s}{\sqrt[u]{s-i}}$$

将t_i的平均定义域宽度记为w_i，则

$$w_i = {}^{\uparrow}t_i - {}^{\downarrow}t_i = {}^{\uparrow}t_i - \overline{t_{i-1}} = \frac{1}{\sqrt[u]{s+1-i}} - \frac{1}{{}^{\pm}2\sqrt[u]{s-i}} = \frac{{}^{\pm}0.5_s}{\sqrt[u]{s+1-i}} = \frac{{}^{\pm}C_s}{\sqrt[u]{s+1-i}} \tag{26}$$

$H(u,s,t_0)$的值在$t_0=0$时，接近各变量平均定义域宽度w_i之积相等，共有$s-1$个自变量，由$H(u,s,t_0)$的定义及上式得

$$H(u,s,0) =^{\pm} \prod_{i=1}^{s-1} w_i = \prod_{i=1}^{s-1} \frac{{}^{\pm}C_s}{\sqrt[u]{s+1-i}} = \frac{{}^{\pm}C_s^{s-1}}{\sqrt[u]{s!}} \tag{27}$$

由此可得$H(1,s,0)$、$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i} 1$等的表达式，$H(1,s,0)$的前几个实际值计算如下

$$H\left(1,s,t_0\right)=\int_0^{\frac{1}{s}}dt_1\int_{t_1}^{\frac{1}{s-1}}dt_2\cdots\int_{t_{s-3}}^{\frac{1}{3}}dt_{s-2}\int_{t_{s-2}}^{\frac{1}{2}}dt_{s-1} \qquad (28)$$

$$H\left(1,2,0\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}dt_1=\frac{1}{2}$$

$$H\left(1,3,0\right)=\int_0^{\frac{1}{3}}dt_1\int_{t_1}^{\frac{1}{2}}dt_2=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(0.5-t_1\right)dt_1=0.5\left(t_1-t_1^2\right)\Big|_{t_1=0}^{t_1=\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}$$

$$H\left(1,4,0\right)=\int_0^{\frac{1}{4}}dt_1\int_{t_1}^{\frac{1}{3}}dt_2\int_{t_2}^{\frac{1}{2}}dt_3=\int_0^{\frac{1}{4}}dt_1\int_{t_1}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}-t_2\right)dt_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\left(t_2-t_2^2\right)\Big|_{t_2=t_1}^{t_2=\frac{1}{3}}dt_1$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{9}-\frac{t_1}{2}+\frac{t_1^2}{2}\right)dt_1=\left(\frac{t_1}{9}-\frac{t_1^2}{4}+\frac{t_1^3}{6}\right)\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=\frac{1}{4}}=\frac{1}{9g4}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6g4^3}$$

$$=\frac{1}{9g4}-\frac{5}{6g4^3}=\frac{32-15}{9g4^3}=\frac{17}{9g4^3}$$

其余 $H\left(1,s,0\right)$ 值的计算与此类似，此略

后面将证明哥德巴赫问题是均分问题，下面不再用同阶函数 $^{\pm}C$，直接用渐近函数 $^{1}1$

（见后面 $\left(7.1\right)$ 式的证明）

定理 5 哥德巴赫问题的分析提法(D)、(E)及(F)，即素数方程 $\left(1\right)$ 的解数 $g_2\left(N\right)$、$g_3\left(N\right)$、$g_4\left(N\right)$、……、$g_s\left(N\right)$ 等，可表为

$$g_2\left(N\right)=^{1}2P^2\left(\frac{N}{2}\right)H\left(1,2,0\right)N=\frac{^{1}N}{\ln^2\frac{N}{2}} \qquad (29)$$

$$g_3\left(N\right)=^{1}2P^3\left(\frac{N}{3}\right)H\left(1,3,0\right)N^2=\frac{^{1}2N^2}{3^2\ln^3\frac{N}{3}} \qquad (30)$$

$$g_4\left(N\right)=^{1}2P^4\left(\frac{N}{4}\right)H\left(1,4,0\right)N^3=\frac{^{1}17N^3}{576\ln^4\frac{N}{4}} \qquad (31)$$

………………………………………………

$$g_s\left(N\right)=^{1}G_s\left(N\right)=^{1}2P^s\left(\frac{N}{s}\right)H\left(1,s,0\right)N^{s-1}=\frac{\left(^{\pm}C_sN\right)^{s-1}}{s!\ln^s\frac{N}{s}} \qquad (32)$$

证明　计算满足素数方程的 s 维哥数，等价于统计以下不定方程中，变量在自然数中取值时， ξ_i 均是素数的素数组 $\left\{\xi_i\right\}$ 的个数

$$N=\sum_{i=1}^{s}\xi_i \quad \left(3\le\xi_1\le\frac{N}{s}\quad,\quad \xi_{i-1}\le\xi_i\le M_i=\frac{N}{s+1-i}\right)$$

其中　M_i 是变量 ξ_i 的取值上限，当 ξ_i 在定义域为 $\left(\xi_{i-1},M_i\right)$ 内逐点取值时， ξ_i 各自及同时出现素数的概率，记为 $P\left(\xi_i\right)$ 和 $P\left(\xi_{1:s}\right)$，且 $t_0=0$，因 ξ_i 出现素数的概率 $P\left(\xi_i\right)$ 相互独立，ξ_i 在各自的定义域取奇数时，只有 s-1 个 变量是独立的，有一个变量，将受到以上不定方程的约束，由上面分析得其奇数素数率是对应自然数素数率的 2 倍，同时，定义域也减小一半，则

$$P\left(\xi_{1:s}\right)=\prod_{i=1}^{s}2^sP\left(\xi_i\right)=^{1}2^sP\left(N-\sum_{i=1}^{s-1}\xi_i\right)\prod_{i=1}^{s-1}P\left(\xi_i\right)$$

$$=^{1}2^sP^s\left(\overline{\xi_{1:s}}\right)=^{1}2^sP^s\left(\frac{N}{s}\right)=\frac{{}^{1}2^s}{\ln^s\frac{N}{s}}$$

$$G_s\left(N\right)=\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i}\frac{1}{2^{s-1}}P\left(\xi_{1:s}\right)=\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i}\frac{2^s}{2^{s-1}}P\left(\overline{\xi_{1:s}}\right)=^{1}2P^s\left(\frac{N}{s}\right)\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i}1$$

$$=^{1}2P^s\left(\frac{N}{s}\right)H\left(1,s,0\right)N^{s-1}=\frac{{}^{1}2H\left(1,s,0\right)N^{s-1}}{\ln^s\frac{N}{s}}$$

将 $\left(13\right)$ 到 $\left(21\right)$ 中的 $H\left(1,s,0\right)$ 值代入上式得定理中 $g_s\left(N\right)$ 的系列表达式，证毕

本定理证明了哈代与李特伍德（Hardy-Littlewood）在 1922 年猜测 $\left(5\right)$ 的阶正确，但两者系数表达的意义不同，引起表现的形式也不同：本定理表示该点附近偶数的平均哥数——最可几值，猜测表达的是任意指定偶数的最可几值，本方法迄今未能获得这样深刻的结论

6. 2　哥德巴赫“ 1+u”问题

定义 5 当任何偶数 N，均可表为一个素数，与一个含 u 个因子的合数之和

$$N=p+p_1p_2\cdots\cdots p_u \tag{33}$$

$$\left(p\le N-3^u,\quad 3\le p_1\le\sqrt[u]{N-p},\quad p_{i-1}\le p_i\le\left[\left(N-p\right)\div\left(p_1p_2\cdots\cdots p_{i-1}\right)\right]^{\frac{1}{u-i+1}}\right)$$

时，　称为哥德巴赫“1+ u”问题，简称为“1+u”问题，此两数 p 、$p_1 p_2 \cdots\cdots p_u$ 不同组合的表法个数，称为“1+u”哥德巴赫数，简称“1+u”哥数

6.2.1 哥德巴赫“1+2”问题分析解

1973 年陈景润先生定性地证明了哥德巴赫“1＋2”问题，下面给出它的分析解——定量结果

定理 6 偶数 N 的“1+2”哥数记为 $g(1+2,N)$，则

$$g(1+2,N) =^1 \frac{N^2(\ln\ln N-3)}{2\ln N} \tag{34}$$

$$g(1+2,N) =^{\pm} \overline{P}\left(\frac{N}{2}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}\right)\overline{P}\left(\frac{3\sqrt{2N}}{4}\right)\frac{3N^2}{16} \tag{35}$$

证明　计算 $g(1+2,N)$ 的值，等价于统计下面不定方程

$$N = t + t_1 t_2 \qquad \left(3 \le t \le N-3^2,\ 3 \le t_1 \le \sqrt{N-t},\ t_1 \le t_2 \le (N-t) \div t_1\right) \tag{4}$$

在数组 (t,t_1,t_2) 同时是素数条件下的组数，它们各自及同时是素数的概率，记为 $P(t)$ 、$P(t_1)$ 、$P(t_2)$ 及 $P(1+2,N,t,t_1,t_2)$，由于数组 (t,t_1,t_2) 均连续取值，它们出现素数的概率相互独立，则

$$P(1+2,N,t,t_1,t_2) = P(t)P(t_1)P(t_2) = \frac{^1 1}{\ln t \ln t_1 \ln t_2} \tag{5}$$

对每一组"1+2"结构的数据 (N,t,t_1,t_2)，出现"1+2"哥数个数记为 $g(1+2,N,t,t_1,t_2)$，则

$$g(1+2,N) = \sum g(1+2,N,t,t_1,t_2) =^1 \sum_{t=3}^{N-9}\sum_{t_1=3}^{\sqrt{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{(N-t)\div t_1} P(1+2,N,t,t_1,t_2)$$

$$= \sum_{t=3}^{N-9}\sum_{t_1=3}^{\sqrt{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{(N-t)\div t_1} \frac{^1 1}{\ln t \ln t_1 \ln t_2} =^1 \int_3^N \frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt{N-t}}\frac{dt_1}{\ln t_1}\int_{t_1}^{(N-t)\div t_1}\frac{dt_2}{\ln t_2}$$

$$=^1 \int_3^N \frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt{N-t}}\left(\frac{t_2}{\ln t_2}\Bigg|_{t_2=t_1}^{t_2=\frac{(N-t)}{t_1}}\right)\frac{dt_1}{\ln t_1} =^1 \int_3^N \frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt{N-t}}\left(\frac{(N-t)}{t_1\left[\ln(N-t)-\ln t_1\right]}-\frac{t_1}{\ln t_1}\right)\frac{dt_1}{\ln t_1}$$

$$=^1 \int_3^N \frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt{N-t}}\left(\frac{(N-t)}{t_1\left[\ln(N-t)-\ln t_1\right]}-\frac{t_1}{\ln t_1}\right)\frac{dt_1}{\ln t_1}$$

$$=^{1}\int_{3}^{N}\frac{dt}{\ln t}\left(\int_{3}^{\sqrt{N-t}}\frac{(N-t)}{\ln(N-t)-\ln t_1}\frac{d\ln t_1}{\ln t_1}-\int_{3}^{\sqrt{N-t}}\frac{t_1\,dt_1}{\ln^2 t_1}\right)$$

$$=^{1}\int_{3}^{N}\left(\left(\frac{-(N-t)}{\ln(N-t)}\ln\frac{\ln(N-t)-\ln t_1}{\ln t_1}-\frac{t_1^2}{2\ln^2 t_1}\right)_{t_1=3}^{t_1=\sqrt{N-t}}\right)\frac{dt}{\ln t}$$

$$=^{1}\int_{3}^{N}\left(\frac{N}{\ln N}\ln\ln N-\frac{2(N-t)}{\ln^2(N-t)}\right)\frac{dt}{\ln t}=^{1}\left(\frac{tN}{\ln N}\ln\ln N-\frac{2Nt-t^2}{\ln^2(N-t)}\right)_{t=3}^{t=0.5N}$$

$$=^{1}\left(\frac{N^2\ln\ln N}{2\ln N}-\frac{4N^2-N^2}{4\ln^2(N-t)}\right)=^{1}\frac{N^2(\ln\ln N-3)}{2\ln N}$$

得(34)。可用$P(1+2,N,t,t_1,t_2)$的平均值$\overline{P}(1+2,N,t,t_1,t_2)$简化计算过程，获得近似解，

由(36)、(37)得

$$N=t+t_1t_2 \qquad (3\le t\le N-3^2\ ,\ 3\le t_1\le\sqrt{N-t}\ \ ,\ t_1\le t_2\le(N-t)\div t_1)$$

$$\overline{P}(1+2,N,t,t_1,t_2)=^{1}\overline{P}(t)\,\overline{P}(t_1)\,\overline{P}(t_2)=^{1}P(\overline{t})\,P(\overline{t_1})\,P(\overline{t_2})$$

$$=^{1}\overline{P}\left(\frac{N}{2}\right)\overline{P}\left(\frac{1}{2}\sqrt{N-\frac{N}{2}}\right)\overline{P}\left(\frac{1}{2}\sqrt{N-\frac{N}{2}}+\frac{1}{2}\left(N-\frac{N}{2}\right)\div\frac{1}{2}\sqrt{N-\frac{N}{2}}\right)$$

$$=^{1}\overline{P}\left(\frac{N}{2}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}+\frac{N}{4}\div\frac{\sqrt{2N}}{4}\right)=^{1}\overline{P}\left(\frac{N}{2}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}+\frac{\sqrt{2N}}{2}\right)$$

$$\overline{P}(1+2,N,t,t_1,t_2)=^{1}\overline{P}\left(\frac{N}{2}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}\right)\overline{P}\left(\frac{3\sqrt{2N}}{4}\right)$$

$$g(1+2,N)=\sum g(1+2,N,t,t_1,t_2)=^{1}\sum_{t=3}^{N-9}\sum_{t_1=3}^{\sqrt{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{(N-t)\div t_1}P(1+2,N,t,t_1,t_2)$$

$$=^{1}\sum_{t=3}^{N-9}\sum_{t_1=3}^{\sqrt{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{(N-t)\div t_1}\overline{P}(1+2,N,t,t_1,t_2)=^{1}\overline{P}(t)\,\overline{P}(t_1)\,\overline{P}(t_2)\sum_{t=3}^{N-9}\sum_{t_1=3}^{\sqrt{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{(N-t)\div t_1}1$$

$$=^{\pm}\overline{P}(t)\,\overline{P}(t_1)\,\overline{P}(t_2)\,\overline{t}*\overline{t_1}*\overline{t_2}=^{\pm}\overline{P}\left(\frac{N}{2}\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4}\right)\overline{P}\left(\frac{3\sqrt{2N}}{4}\right)\frac{N}{2}\frac{\sqrt{2N}}{4}\frac{3\sqrt{2N}}{4}$$

整理上式得(35)，证毕

6.2.2 哥德巴赫“1+3”问题分析解

定理 249 偶数 N 的“1+3”哥数记为$g\left(1+3,N\right)$，则

$$g\left(1+3,N\right)=^{1}\frac{\ln\ln\left(0.5N\right)-3\ln 3}{6\ln^{2}\left(0.5N\right)\ln 3}N^{2} \tag{38}$$

证明　同理，计算$g\left(1+3,N\right)$的值，等价于统计下面不定方程

$$N=t+t_1t_2t_3 \tag{39}$$

$\left(3\le t\le N-3^{3}\ ,\ 3\le t_1\le\sqrt[3]{N-t}\ ,\ t_1\le t_2\le\sqrt{\left(N-t\right)\div t_1}\ ,\ t_2\le t_3\le\left(N-t\right)\div\left(t_1t_2\right)\right)$

在数组$\left(t,t_1,t_2,t_3\right)$同时是素数条件下的组数，它们各自及同时是素数的概率，记为$P\left(t\right)$、$P\left(t_1\right)$、$P\left(t_2\right)$、$P\left(t_3\right)$及$P\left(1+2,N,t,t_1,t_2\right),t_3$，由于数组$\left(t,t_1,t_2,t_3\right)$均连续取值，它们出现素数的概率相互独立，则

$$P\left(1+2,N,t,t_1,t_2,\right)t_3=P\left(t\right)P\left(t_1\right)P\left(t_2\right)P\left(t_3\right)=\frac{^{1}1}{\ln t\ln t_1\ \ln t_2\ \ln t_3}$$

对每一组"1+3"结构的数据$\left(N,t,t_1,t_2,t_3\right)$，出现"1+3"哥数个数记为$g\left(1+3,N,t,t_1,t_2,t_3\right)$，则

$$g\left(1+3,N\right)=\sum g\left(1+3,N,t,t_1,t_2,t_3\right)=^{1}\sum_{t=3}^{N-27}\sum_{t_1=3}^{\sqrt[3]{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\sum_{t_3=t_2}^{\frac{N-t}{t_1t_2}}P\left(1+2,N,t,t_1,t_2,t_3\right)$$

$$=\sum_{t=3}^{N-27}\sum_{t_1=3}^{\sqrt[3]{N-t}}\sum_{t_2=t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\sum_{t_3=t_2}^{\frac{N-t}{t_1t_2}}\frac{^{1}1}{\ln t\ln t_1\ \ln t_2\ \ln t_3}=^{1}\int_3^{N}\frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt[3]{N-t}}\frac{dt_1}{\ln t_1}\int_{t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\frac{dt_2}{\ln t_2}\int_{t_2}^{\frac{N-t}{t_1t_2}}\frac{dt_3}{\ln t_3}$$

$$=^{1}\int_3^{N}\frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt[3]{N-t}}\frac{dt_1}{\ln t_1}\int_{t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\left(\left.\frac{t_3}{\ln t_3}\right|_{t_3=t_2}^{t_3=\frac{N-t}{t_1t_2}}\right)\frac{dt_2}{\ln t_2}$$

$$=^{1}\int_3^{N}\frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt[3]{N-t}}\frac{dt_1}{\ln t_1}\int_{t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\left(\frac{\left(N-t\right)}{t_1t_2\left[\ln\left(N-t\right)-\ln t_1-\ln t_2\right]}-\frac{t_2}{\ln t_2}\right)\frac{dt_2}{\ln t_2}$$

$$=^{1}\int_3^{N}\frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt[3]{N-t}}\frac{dt_1}{\ln t_1}\left[\int_{t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\frac{\left(N-t\right)dt_2}{t_1t_2\left[\ln\left(N-t\right)-\ln t_1-\ln t_2\right]\ln t_2}-\int_{t_1}^{\sqrt{(N-t)\div t_1}}\frac{t_2dt_2}{\ln^{2}t_2}\right]$$

$$=^1\int_3^N \frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt[3]{N-t}}\left(\left(\frac{-(N-t)}{t_1\ln(N-t)}\ln\frac{\ln(N-t)-\ln t_1-\ln t_2}{\ln t_2}-\frac{t_2^2}{2\ln^2 t_2}\right)_{t_2=t_1}^{t_2=\sqrt{(N-t)\div t_1}}\right)\frac{dt_1}{\ln t_1}$$

$$=^1\int_3^N \frac{dt}{\ln t}\int_3^{\sqrt[3]{N-t}}\left(\frac{(N-t)}{t_1^2\ln(N-t)}\ln\frac{\ln(N-t)-2\ln t_1}{\ln t_1}-\frac{2(N-t)}{t_1\left(\ln(N-t)-\ln t_1\right)^2}+\frac{t_1^2}{2\ln^2 t_1}\right)\frac{dt_1}{\ln t_1}$$

$$=^1\int_3^N\left(\left(\frac{-(N-t)}{t_1\ln(N-t)\ln t_1}\ln\frac{\ln(N-t)-2\ln t_1}{\ln t_1}-\frac{2(N-t)}{\ln(N-t)-\ln t_1}+\frac{t_1^3}{6\ln^3 t_1}\right)_{t_1=3}^{t_1=\sqrt[3]{N-t}}\right)\frac{dt}{\ln t}$$

$$=^1\int_3^N\left(\frac{(N-t)}{3\ln(N-t)\ln 3}\ln\frac{\ln(N-t)-2\ln 3}{\ln 3}-\frac{6(N-t)}{3\ln(N-t)-\ln(N-t)}\right)\frac{dt}{\ln t}$$

$$+\int_3^N\left(\frac{9(N-t)}{2\ln^3(N-t)}+\frac{2(N-t)}{\ln(N-t)-\ln 3}\right)\frac{dt}{\ln t}$$

$$=^1\int_3^N\left(\frac{(N-t)\ln\ln(N-t)}{3\ln(N-t)\ln 3}-\frac{(N-t)}{\ln(N-t)}+\frac{9(N-t)}{2\ln^3(N-t)}\right)\frac{dt}{\ln t}$$

$$=^1\left(\frac{\ln\ln(0.5N)}{3\ln(0.5N)\ln 3}-\frac{1}{\ln(0.5N)}+\frac{9}{2\ln^3(0.5N)}\right)\frac{1}{\ln 0.5N}\int_3^N(N-t)\,dt$$

整理上式得(38)

理论上讲，用本方法，可计算任意 K 值的哥德巴赫“1+K”问题

6. 3 哥德巴赫数准确值

6. 3.1 偶哥德巴赫数准确值

定理 8 偶数 $N=2n$ 表为两素数和

$$p_1+p_2=N=2n\quad\left(\quad p_1\le p_2\quad\right)\tag{40}$$

的表法个数——哥德巴赫数，记为 $g_2(N)$ 、 $G_2(N)$ ，则

$$g_2(N)=\sum_{3\le p\le 0.5N}\left[\pi(N-p)-\pi(N-p-1)\right]=^1 G_2(N) \qquad (41)$$

证明　当 p 及 $N-p$ 同时是素数时，$\left[\pi(N-p)-\pi(N-p-1)\right]$ 的值为 1，得到一个哥数，p 在 $(3,\ 0.5N)$ 内求和得 $\sum_{3\le p\le 0.5N}\left[\pi(N-p)-\pi(N-p-1)\right]$，就得到了所有满足素数方程 $p_1+p_2=N$ 的不同素数组合 $(p_1,\ p_2)$ 的表法个数——N 的哥数 $g_2(N)$，得 (41)

6. 3.2 奇哥德巴赫数准确值

定理 259 奇数 $N=2n+1$ 表为三素数和

$$p_1+p_2+p_3=N=2n+1 \quad (p_1\le p_2\le p_3) \qquad (42)$$

的表法个数——奇哥德巴赫数，记为 $g_3(N)$ 、$G_3(N)$ ，则

$$g_3(N)=\sum_{\substack{3\le p_1\le x/3\\ p_1\le p_2\le x-p_1}}\left[\pi(N-p_1-p_2)-\pi(N-p_1-p_2-1)\right]=^1 G_3(N) \qquad (43)$$

证明　方法同上，此略

6. 3.3 S 维哥德巴赫数准确值

定理 10 整数 N 表为 S 个素数 p_i 之和，即

$$p_1+p_2+\cdots+p_s=N=2n+s \bmod 2 \quad (p_i\le p_{i+1}) \qquad (44)$$

的表法个数，称为 S 维哥德巴赫数，记为 $g_s(N)$ 、$G_s(N)$ ，则

$$g_s(N)=\sum_{\substack{3\le p_1\le x/s\\ p_i\le p_{i+1}\le x-\sum_{j=1}^{i}p_j}}\left[\pi\left(x-\sum_{j=1}^{i+1}p_j\right)-\pi\left(\sum_{j=1}^{i+1}p_j-1\right)\right]=^1 G_s(N) \qquad (45)$$

证明　方法同上，此略

6.4 哥德巴赫数定理准确值

6.4.1 偶哥德巴赫数定理准确值

定理 11　将偶数 $N=2n\le x$ 的 $g_2(2n)$ 、 $G_2(2n)$ 的累计值——偶哥数定理，记为 $\pi(x,g_2)$ ， $\Pi(x,g_2)$ ，则

$$\pi(x,g_2)=\sum_{n=3}^{0.5x}g_2(2n)=\sum_{3\le p\le 0.5x}\left[\pi(x-p)-\pi(p-1)\right] \qquad (46)$$

$$g_2(x)=\pi(x,g_2)-\pi(x-2,g_2) \qquad (47)$$

证明　　前几个实际数据如下

（1）

$$\pi(6,g_2)=\sum_{n=3}^{3}g_2(2n)=g_2(6)=1$$

$$\sum_{3\le p\le 3}\left[\pi(6-p)-\pi(p-1)\right]=2-1=1$$

$x=6$ 时成立

（2）

$$\pi(8,g_2)=\sum_{n=3}^{4}g_2(2n)=g_2(6)+g_2(8)=(3,3),(3,5)=\pi(8-3)-\pi(3-1)$$

$$=\sum_{3\le p\le 4}\left[\pi(8-p)-\pi(p-1)\right]=\left[\pi(8-3)-\pi(3-1)\right]=3-1=2$$

$x=8$ 时成立

（3）

$$\pi(10,g_2)=\sum_{n=3}^{5}g_2(2n)=g_2(6)+g_2(8)+g_2(10)=(3,3),(3,5),(3,7),(5,5)$$

$$=\sum_{3\le p\le 5}\left[\pi(10-p)-\pi(p-1)\right]$$

$$=\left[\pi(10-3)-\pi(3-1)\right]+\left[\pi(10-5)-\pi(5-1)\right]=3+1=4$$

$x=10$ 时成立

（4）

$$\pi(12,g_2)=\sum_{n=3}^{6} g_2(2n)=g_2(6)+g_2(8)+g_2(10)+g_2(12)$$

$$=(3,3),(3,5),(3,7),(5,5),(5,7)$$

$$=\sum_{3\le p\le 6}\left[\pi(12-p)-\pi(p-1)\right]$$

$$=\left[\pi(12-3)-\pi(3-1)\right]+\left[\pi(12-5)-\pi(5-1)\right]=3+2=5$$

$x=12$ 时成立

……………

结合以下示意图，说明如下

————————————————————|————————————————————

3　　　　　　　　　　　　　　$0.5|x$　　　　　　　　　　　　　$x-3$

↑___5_____________________|_________________$x-5$__↑

↑___7__________________|_______________$x-7$__↑

…………………………………………… ………………

↑__P__________|_______$x-P$___↑

…………………………

↑$0.5x-a|0.5x+a$↑

哥数定理$\pi(x,g_2)$既可用小于 x 的各偶数 2n 的哥数$g_2(2n)$求和$\sum_{n=3}^{0.5x} g_2(2n)$得到，即$(46)$式的前部分，还可用$g_2(2n)$的素数组合$(p_1，p_2)$中，相同的最小素数$p_1$作为分类标准，下面用另一种方式进行统计分类：

（1）　最小素数p_1是 3 时，它可以与（3，x-3）中$\pi(x-3)$个素数，组成$\pi(x-3)$ EMBED Equation.DSMT4 $-\pi(3-1)$个满足素数方程　$p_1+p_2\le x$的解

（2）　最小素数p_1是 5 时，它可以与（5，x-5）中的素数，组成$\pi(x-3)-\pi(5-1)$个满足素数方程：$p_1+p_2\le x$的解

（3）　最小素数p_1是 7 时，它可以与（7，x-7）中的素数，组成$\pi(x-7)-\pi(7-1)$个满足素数方程：$p_1+p_2\le x$的解

……………………………………………………………………

（4） 最小素数 p_1 是 p 时，它可以与 $(p, x-p)$ 中的素数 p_2，组成 $\pi(x-p)-\pi(p-1)$ 个满足素数方程 $p_1+p_2\le x$ 的解

p 在 $(3, 0.5x)$ 内对 $\pi(x-p)-\pi(p-1)$ 求和，得到满足素数方程 $p_1+p_2\le x$ 的所有解——哥德巴赫数定理 $\pi(x,g_2)$ 为 $\sum_{p\le 0.5x}\left[\pi(x-p)-\pi(p-1)\right]$，得 (46) 式的右边表达式

由 (46) 的左侧表达式，得

$$\pi(x,g_2)=\sum_{n=3}^{0.5x} g_2(2n)=g_2(x)+\sum_{n=3}^{0.5x} g_2(2n-2)=g_2(x)+\pi(x-2,g_2)$$

上式移项得 (47) 式

6.4.2 奇哥德巴赫数定理准确值

定理 12 将 $N\le x$ 的奇数 N 的奇哥数 $g_3(N)$、$G_3(N)$ 的累计值——奇哥数定理，记为 $\pi(x,g_3)$，$\Pi(x,g_3)$，则

$$\pi(x,g_3)=\sum_{n=0}^{0.5x-4.5} g_3(2n+9)=\sum_{\substack{3\le p_1\le x/3\\ p_1\le p_2\le x-p_1}}\left[\pi(x-p_1-p_2)-\pi(p_1+p_2-1)\right] \quad (48)$$

$$g_3(x)=\pi(x,g_3)-\pi(x-2,g_3) \quad (49)$$

证明 因偶哥德巴赫猜想成立，故每个奇数有机会成为三素数和，统计奇哥德巴赫数定理准确值时，将统计不小于 $3p_1=9$ 的每个奇数 $2n+3$ 的奇哥德巴赫数 $g_3(2n+3)$，可得 (48) 式的左侧表达式，仿照 (46) 式的分析过程可得 (48) 式的右侧表达式，仿照 (47) 式的分析过程可得 (49) 式

6.4.3 S 维哥德巴赫数定理准确值

定理 13 将 $N\le x$ 的整数 N 的 S 维哥数 $g_s(N)$、$G_s(N)$ 的累计值——S 维哥数定理，

记为$\pi(x,g_s)$，$\Pi(x,g_s)$，则

$$\pi(x,g_s)=\sum_{n=0}^{0.5x-4.5} g_s[2n+9]$$

$$=\sum_{\substack{3\le p_1\le x\div s\\ p_i\le p_{i+1}\le x-\sum_{j=1}^{i}p_j}}\left[\pi\left(x-\sum_{j=1}^{i+1}p_j\right)-\pi\left(\sum_{j=1}^{i+1}p_j-1\right)\right] \tag{50}$$

$$g_s(x)=\pi(x,g_s)-\pi(x-2,g_s) \tag{51}$$

证明　仿照(48)、(49)的分析可得(50)、(51)式

6. 5　哥德巴赫数定理渐近解

6. 5.1　偶哥德巴赫数定理渐近解

定理 14

$$\pi(x,g_2)=^1\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2\ln 0.5x}\right)=\frac{{}^1\pi^2(x)H(1,2,0)}{2}=^1\frac{x^2}{4\ln^2 x} \tag{52}$$

证明　由(46)式，得

$$\pi(x,g_2)=\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(x-p)-\sum_{3\le p\le 0.5x}[\pi(p)-1]$$

$$=\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(x-p)-\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(p)+\sum_{3\le p\le 0.5x}1$$

$$=\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(x-p)-\sum_{i=1}^{\pi(0.5x)}\pi(p_i)+\pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(x-p)-\sum_{i=1}^{\pi(0.5x)}i+\pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\pi(x,g_2)=\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(x-p)-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)\left[\pi\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]$$

$$\pi(x,g_2)=^1\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi\left(x-\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)=^1\Pi\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)\sum_{3\le p\le 0.5x}1-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=^1\left[\Pi\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{4}P\left(\frac{x}{2}\right)\right]\pi\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)=^1\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{\ln 0.5x-1}{2\ln 0.5x}-\frac{1}{2}\right)$$

整理上式，得本定理$\pi(x,g_2)$表达式，也可以借助(29)式获得$\pi(x,g_2)$表达式

6.5.2 奇哥德巴赫数定理渐近解

定理 15 x 的奇哥德巴赫数定理，记为$\pi(x,g_3)$、$\Pi(x,g_3)$，则

$$\pi(x,g_3)=\sum_{n=1}^{0.5x}g_3(2n+1)=^1\Pi(x,g_3)=\frac{^1\pi^3(x)H(1,3,0)}{3}=\frac{^1N^3}{3^3\ln^3\frac{N}{3}} \quad (53)$$

证明 借助于(30)式，与(52)的计算过程相似，此略

6.5.3 S 维哥德巴赫数定理渐近解

定理 16 将 x 的 S 维哥德巴赫数定理，分别记为$\pi(x,g_s)$、$\Pi(x,g_s)$，则

$$\pi(x,g_s)=\sum_{n=1}^{0.5x}g_s(2n+s\bmod 2)=^1\Pi(x,g_s)$$

$$=^1\frac{1}{s}P^s\left(\frac{x}{2s}\right)H(1,s,0)x^s=\frac{^1\pi^s(x)H(1,s,0)}{s}=\frac{^{\pm}C_s^{s-1}x^s}{s*s!\ln^s\frac{x}{s}} \quad (54)$$

证明 由(32)式

$$g_s(N)=^1G_s(N)=^1 2P^s\left(\frac{N}{s}\right)H(1,s,0)N^{s-1}=\frac{^{\pm}C_sN^{s-1}}{s!\ln^s\frac{N}{s}}$$

得

$$\pi(x,g_s)=\sum_{n=1}^{0.5x}g_s(2n+s\bmod 2)=^1\int^{0.5x}G_s(2t+s\bmod 2)\,dt$$

$$=^{1}\int^{0.5x} 2P^{s}\left(\frac{2t+s \bmod 2}{s}\right)H(1,s,0)(2t+s \bmod 2)^{s-1}dt$$

$$=^{1} 2P^{s}\left(\frac{x}{2s}\right)H(1,s,0)\int^{0.5x}(2t)^{s-1}dt =^{1} \frac{1}{s}P^{s}\left(\frac{x}{2s}\right)H(1,s,0)x^{s}$$

整理上式，得定理中$\pi(x,g_s)$等的值

6.6 哥德巴赫数的估值

定理 17　将x偶哥数$g_2(x)$的平均值及理论值，分别记为$\overline{g}_2(x)$、$G_2(x)$，则

$$G_2(x) =^{1} \overline{g}_2(x) = \frac{^{\pm}\pi^{2}(x)}{x} = \frac{^{\pm}li^{2}(x)}{x} = \frac{^{\pm}x}{\ln^{2}x} \qquad (55)$$

证明　由(49)及哥德巴赫数定理，得

$$\pi(x,g_s) = \sum_{n=3}^{0.5x} g_2(2n) =^{\pm} \sum_{n=3}^{0.5x}\overline{g}_2\left(2\frac{x}{4}\right) =^{\pm} \overline{g}_2\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{n=3}^{0.5x}1$$

$$=^{\pm} \overline{g}_2(0.5x)\,0.5x =^{\pm} \pi^{2}(0.5x) =^{\pm} li^{2}(0.5x)$$

在上式中，引用了(29)式，并用 x 代替$0.5x$得定理中$\overline{g}_2(x)$、$G_2(x)$的表达式，证毕

6.7 哥德巴赫数渐近解

6.7.1 偶哥德巴赫数渐近解

定理 18　x的偶哥德巴赫数为$g_2(x)$、$G_2(x)$，则

$$g_2(x) =^{1} G_2(x) =^{1} \frac{2}{x}\pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2\ln 0.5x}\right) = \frac{^{1}li^{2}(x)}{x} = \frac{^{1}x}{\ln^{2}x} \qquad (56)$$

证明　由(46)、(52)得

$$g_2(x)=\pi(x,g_2)-\pi(x-2,g_2)$$

$$=^{1}\frac{x^2}{4(\ln x-1)^2}\left(1-\frac{1}{2\ln 0.5x}\right)-\frac{(x-2)^2}{4(\ln(x-2)-1)^2}\left(1-\frac{1}{2\ln 0.5(x-2)}\right)$$

$$=^{1}\frac{x^2}{4(\ln 0.5x-1)^2}\left(1-\frac{1}{2\ln 0.5x}\right)-\frac{(x-2)^2}{4(\ln 0.5(x-2)-1)^2}\left(1-\frac{1}{2\ln 0.5(x-2)}\right)$$

整理上式得定理中 $g_2(x)$ 、$G_2(x)$ 表达式，证毕

哥德巴赫问题(D)获解[] ^{p53}，有关数据如表 6.1 所示。(56) 式与哈代与李特伍德（Hardy-Littlewood）1922 年的猜测 (6) 式的阶相同。

表 6.1　每个区间相邻 20 个偶数的偶哥德巴赫数数据表

x →	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
0	2	6	28	127	811	5402	38807	291400
2	1	8	36	197	1423	8200	59624	464621
4	2	5	18	99	627	4160	36850	247582
6	2	6	18	92	630	4871	29835	218966
8	2	8	42	192	1209	9380	58229	437717
10	2	6	25	191	831	5951	39045	323687
12	3	7	23	99	681	4375	35731	263241
14	3	10	39	209	1235	8133	58445	437518
16	3	6	18	104	772	4042	31905	220846
18	2	6	20	99	635	4061	35420	233634
Σ	22	68	267	1409	8836	58575	423891	3139212
20	3	12	51	263	1602	12984	77536	595554
22	2	4	18	99	674	4071	29033	220244
24	4	5	22	121	599	4119	29125	218846
26	4	10	42	194	1232	8120	58372	537452
28	2	3	18	106	627	4059	29480	220614
30	3	7	25	139	972	5421	38805	318202
32	4	9	36	238	1212	9035	73394	488938
34	3	6	21	104	670	4855	32352	218651
36	4	5	27	109	590	4295	29122	218867
38	5	8	40	235	1191	8869	58299	437686
Σ	56	137	567	3017	17384	124403	879409	6614266
$0.5x+9.5$	14.5	59.5	509.5	5009.5	$\pm 5*10^4$	$\pm 5*10^5$	$\pm 5*10^6$	$\pm 5*10^7$
$\pi(0.5x+9.5)$	6	16	97	671	5133	41539	348513	3001134
$\overline{g_2(x+19)}$	2.80	6.85	28.35	150.85	869.2	6220	43970	330713
$G_2(x+19)_0$	2.48	4.30	18.47	89.87	526.8	3451	24292	180136
$^{1}_{g}1$		1.59	1.554	1.679	1.650	1.802	1.810	1.836

$G_2(x+19)_0=\pi^2(0.5x+9.5)\div(0.5x+9.5)$　，　$^{1}_{g}1=\overline{g_2(x+19)}\div G_2(x+19)_0$

数据分析： x 在 10 的 2 至 8 次幂附近 20 个偶数中， $g_2(x)$ 数最大值与最小值相差约 3 倍，且 ${}^1_g1$ 值在 1.8 左右，这说明两个个问题：随机波动较大，在某些值附近出现倾向性偏差，从后面的哥数的累计值，即哥数定理的比较中可看出实际值支持理论值的精度更高

6. 7.2 奇哥德巴赫数渐近解

定理 19　x 的奇哥德巴赫数，记为 $g_3(x)$ 、 $G_3(x)$ ，则

$$g_3(x) =^1 G_3(x) = \frac{^1 2N^3}{3^3 \ln^3 \frac{N}{3}} \tag{57}$$

证明　同上，此略

6. 7.3 S 维哥德巴赫数渐近解

定理 20　x 的 s 维哥德巴赫数，记为 $g_s(x)$ 、 $G_s(x)$ ，则

$$g_s(x) =^1 G_s(x) = \frac{^1 2\pi^{s-1}(x) H(1,s,0)}{\ln x} = \frac{\left(^{\pm} C_s x\right)^{s-1}}{s! \ln^s \frac{x}{s}} \tag{58}$$

证明　由 (51) 及 (54) 式

$$g_s(x) = \pi(x, g_s) - \pi(x-2, g_s)$$

$$\pi(x, g_s) = \frac{^1 \pi^s(x) H(1,s,0)}{s} = \frac{^{\pm} C_s^{s-1} x^s}{s * s! \ln^s \frac{x}{s}}$$

及素数定理 $\pi(x) =^1 li(x)$ ，得

$$g_s(x) = \frac{^1 \pi^s(x) H(1,s,0)}{s} - \frac{^1 \pi^s(x-2) H(1,s,0)}{s} = \frac{^1 2\pi^{s-1}(x) H(1,s,0)}{\ln x}$$

整理上式，得定理中 $g_s(x)$ 的值

6. 8 哥德巴赫数定理精确值

引理 2

$$\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(p-1)=\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]\pi\left(\frac{x}{2}\right)=\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{1}{2}+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] \qquad (59)$$

证明

$$\sum_{3\le p\le 0.5x}\pi(p-1)=\sum_{n=2}^{\pi(0.5x)}\pi(p_n-1)=\sum_{n=2}^{\pi(0.5x)}(n-1)=\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]\pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

整理上式，本引理获证

定理 21　设 x 的偶哥德巴赫数定理，记为 $\pi(x,g_2)$、$\Pi(x,g_2)$，边界记为 $\Pi(x,g_2)$，均方差记为 $\sigma(x,g_2)$，则

$$\Pi(x,g_2)=\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)+\int_3^{0.5x}\Pi(t)P(x-t)\,dt \qquad (60)$$

$$\pi(x,g_2)=\Pi(x,g_2)\pm\Pi(x,g_2) \qquad (61)$$

$$\Pi(x,g_2)=^{\pm}\pi(0.5x)\sqrt{2\ln\ln x} \qquad (62)$$

$$\sigma(x,g_2)=^{\pm}\pi(0.5x) \qquad (63)$$

$$\Pi(x,g_2)=\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)+\int_3^{0.5x}\frac{li(t)\,dt}{\ln(x-t)}=\left(1-\frac{1+A_{2.1}}{4\ln 0.5x}-\frac{2-A_{2.1}+2A_{2.2}-A_{3.1}}{8\ln^2 0.5x}\right.$$
$$\left.-\frac{18+6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}-C_{3.2}+C_{4.1}}{16\ln^3 0.5x}\right)\pi^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (64)$$

$$\Pi(x,g_2)=\left\{1-\frac{0.38586}{\ln 0.5x}-\frac{0.19554}{\ln^2 0.5x}-\frac{1.38624}{\ln^3 0.5x}+\frac{\le 1}{\ln^4 0.5x}\right\}\pi^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (65)$$

其中　$A_1-2A_{2.2}=0.22759$，　$6A_{2.1}+4A_{2.2}+5A_{2.3}=4.13089$

$$A_{3.1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(J+k+4)\,2^{J+K}}=0.20812$$

$$C_{3.2}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{2(J+3)-(J+1)(J+k+4)}{(J+3)^2(J+k+4)^2\,2^{J+K}}=0.01255$$

$$C_{4.1}=\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{(J+3)(J+k+4)(J+k+L+5)\,2^{J+k+L}}=0.06150$$

$$\Pi(x,g_2)={}^{1}\frac{1}{2}\pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\left[\Pi\left(\frac{x}{2}\right)P\left(\frac{x}{2}\right)+P^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\Pi\left(\frac{x}{2}\right)P'\left(\frac{x}{2}\right)\right]\quad(66)$$

证明　由(46)式等，得

$$\pi(x,g_2)=\sum_{3\le p\le 0.5x}\{\pi(x-p)-\pi(p-1)\}$$

$$=\sum_{3\le p\le 0.5x}\Pi(x-p)-\sum_{n=2}^{\pi(0.5x)}\pi(p_n-1)\pm\Pi(x,g_2)$$

$$={}^{1}\int^{0.5x}\Pi(x-p)P(t)\,dt-\sum_{n=2}^{\pi(0.5x)}(n-1)\pm\Pi(x,g_2)$$

$$={}^{1}\int_{3}^{0.5x}\Pi(x-t)\,d\Pi(t)-\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]\pi\left(\frac{x}{2}\right)\pm\Pi(x,g_2)$$

$$={}^{1}\left.\Pi(x-t)\Pi(t)\right|_{t=3}^{t=0.5x}-\int_{3}^{0.5x}\Pi(t)\,d\Pi(x-t)-\frac{1}{2}\pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\pm\Pi(x,g_2)$$

$$={}^{1}\Pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{3}^{0.5x}\Pi(t)P(x-t)\,dt-\frac{1}{2}\pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\pm\Pi(x,g_2)=\Pi(x,g_2)\pm\Pi(x,g_2)$$

即

$$\pi(x,g_2)=\Pi(x,g_2)\pm\Pi(x,g_2)$$

得(61)

比较上两式得：

$$\Pi(x,g_2)={}^{1}\frac{1}{2}\pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{3}^{0.5x}\Pi(t)P(x-t)\,dt={}^{1}\frac{1}{2}\pi^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{3}^{0.5x}\frac{li(t)\,dt}{\ln(x-t)}$$

由第 5 章的(106)：(112)式及上式得(60)、(64)、(65)式。

由(60)及前面“边界”一章中的(14)、(15)计算(61)中的 $\Pi(x,g_2)$ 及(63)式的 $\sigma(x,g_2)$，得

$$\Pi(x,g_2)=^{\pm}\sqrt{2\Pi(x,g_2)\left(1-\frac{\Pi(x,g_2)}{x}\right)\ln\ln x}$$

$$=^{\pm}\sqrt{2\pi^2(0.5x)\left(1-\frac{\pi^2(0.5x)}{x}\right)\ln\ln n}$$

$$=^{\pm}\pi(0.5x)\sqrt{2\ln\ln x}=^{\pm}\sigma(x,g_2)\sqrt{2\ln\ln x}$$

得(62)、(63)式。

数据见如表 6.2

表 6.2 哥数定理精确值数据表

x	π (0.5 x)	π (x)	$\Pi(x,g_2)_0$	$\pi(x,g_2)$	$\frac{\pi(x,g_2)}{\Pi(x,g_2)_0}$
10	3	4	3.1706	4	1. 2616
$10^{1.5}$	6	11	27. 40	27	0. 9855
10^2	15	25	194. 7	188	0. 9656
$10^{2.5}$	37	65	1234. 6	1223	0. 9906
10^3	95	168	8367	8221	0. 9826
10^4	668	1229	423804	433471	1.0228
10^5	5133	9592	25335221	25478890	1.0057
10^6	41538	78498	1671652490	1671879782	1. 00014
10^7	348513	664579	118277217727	118268797137	0. 999929
10^8	3001134	5761455	88102916624085	8804091976099	1. 000133
10^9	26355867	50847534	680791972988084	680858394988085	1. 000091

本数据表中精确偶哥数定理实际数据 $\pi(x,g_2)$，由东陆论坛的网友 crank 编程计算提供，借此致谢！$10^{0.5}=3.162277660$

发帖网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=4790&Forum_ID=9

其中 $\Pi(x,g_2)_0=\left(1-\frac{0.38586}{\ln 0.5x}-\frac{0.19554}{\ln^2 0.5x}-\frac{1.38624}{\ln^3 0.5x}\right)\pi^2\left(\frac{x}{2}\right)$

由数据表可以看出，理论值与实际值吻合，精确偶哥数定理的精度——实际值与理论值之比 $\pi(x,g_2)\div\Pi(x,g_2)_0$，与精确素数定理的精度相当，这与精确偶哥数定理是建立在精确素数定理基础上的事实相符

这部分内容发布网址：
东陆论坛：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23949&Forum_ID=7

可以小范围手工统计如下：

$g_2(6)=1(3+3)$， $g_2(8)=1(3+5)$， $g_2(10)=2(3+7,5+5)$，

$\pi(10,g_2)=4$

$g_2(12)=1(5+7)$， $g_2(14)=2(3+11,7+7)$， $g_2(16)=2(3+13,5+11)$， $g_2(18)$ $=2(5+13,7+11)$， $g_2(20)=2(3+17,7+13)$， $g_2(22)=3(3+19,5+17,\ 11+11)$， $g_2(24)=3(5+19,7+17,11+13)$， $g_2(26)=3(3+23,7+19,13+13)$， $g_2(28)=$ $2(5+23,11+17)$， $g_2(30)=3(7+23,11+19,13+17)$，

$\pi(10^{1.5},g_2)=27$

6.9 广义哥德巴赫方程

定义 6 将下面素数 p_i 的 $H_{i,j}$ 次幂之和，等于自然数 N_j 的 u 行方程组，称为广义哥德巴赫方程

$$\begin{cases} p_1^{H_{1,u}} + p_2^{H_{2,u}} + \cdots\cdots + p_s^{H_{s,u}} = N_u \\ p_1^{H_{1,u-1}} + p_2^{H_{2,u-1}} + \cdots\cdots + p_s^{H_{s,u-1}} = N_{u-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^{H_{1,1}} + p_2^{H_{2,1}} + \cdots\cdots + p_s^{H_{s,1}} = N_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} p_{i-1} \le p_i \\ 1 = N_j \\ 1 \le i \le s \\ 1 \le j \le u \end{pmatrix} \tag{67}$$

它是哥德巴赫猜想的推广

6.9.1 广义哥德巴赫数

定义 7 在广义哥德巴赫方程(1)中，由素数组$\{p_i\}$构成方程的解的不同组合个数，称为广义哥德巴赫数[2]P63，简称广哥数

引理 3

$$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i} 1 = \prod_{i=1}^{s-1}\frac{M_i-\xi_{i-1}}{{}^{\pm}C_i} = {}^{\pm}C_i^{s-1}\prod_{i=1}^{s-1} M_i \tag{68}$$

证明

$$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_i}1=\prod_{i=1}^{s-1}\frac{M_i-\xi_{i-1}}{{}^{\pm}C_i}=\prod_{i=1}^{s-1}\frac{M_i}{{}^{\pm}C_i}\left(1-\frac{\xi_{i-1}}{M_i}\right)={}^{\pm}C_i^{s-1}\prod_{i=1}^{s-1}M_i$$

因$\xi_{i-1}\div M_i$ 的值随 s 的增加向 0.5 趋近，是同阶函数 ${}^{\pm}C$，证毕

在素数方程组(1)中，第 i 列（纵向）的最大指数，记为$H_{i,\max}$，即

$$H_{i,\max}=Max\{H_{i,j}\}_{j=1}^{u} \tag{69}$$

定义 8 当$\sum_{j=1}^{u}\sum_{i=2}^{s}\left(H_{i,j}-H_{i-1,j}\right)^2>0$时，称素数方程组$(2)$是非齐次方程组

定义 9 当$\sum_{j=1}^{u}\sum_{i=2}^{s}\left(H_{i,j}-H_{i-1,j}\right)^2=0$时，称素数方程组$(2)$是齐次方程组

定理 22 第 i 列（纵向）的素数变量 p_i 能取的最大值，记为$M_{i,\max}$

1) 当素数方程组是非齐次方程组时，简称非齐次素数方程组，满足素数方程组的广哥数，记为$G\left(H_{i\le s,j\le u},N_{j\le u}\right)$，若该方程已存在若干个解，则

$$G\left(H_{i\le s,j\le u},N_{j\le u}\right)=\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{{}^{\pm}c}{\ln M_{i,\max}}\right)\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_{s,j}}\left(\frac{{}^{\pm}b}{M_{s,\max}}\right)^{H_{s,j}-1}$$

$$\left(\xi_0=3\right) \tag{70}$$

其中

$$\ln M_{i,\max}=Min\left\{\frac{{}^{\pm}c\ln N_j}{Max\{H_{t,j}\}_{t=i}^{s}}\right\}_{j=1}^{u} \tag{71}$$

$$\frac{1}{\ln M_{i,\max}}=Max\left\{\frac{Max\{H_{t,j}\}_{t=i}^{s}}{{}^{\pm}c\ln N_j}\right\}_{j=1}^{u} \tag{72}$$

2) 当素数方程组是齐次方程时，简称齐次素数方程组，满足素数方程组的广哥数，记为$G\left(H_{j\le u},N_{j\le u}\right)$，若该方程已存在若干个解，则

$$\frac{1}{M_{i,\max}}=Max\left\{\left(\frac{s+1-i}{{}^{1}N_j}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u} \tag{73}$$

$$\frac{1}{M_{s,\max}}=Max\left\{\left(\frac{{}^{1}1}{N_j}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u} \tag{74}$$

$$P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p=\prod_{i=1}^{s}Max\left\{\frac{{}^{1}H_j}{\ln N_j-\ln\left(s+1-i\right)}\right\}_{j=1}^{k} \tag{75}$$

$$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}=\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_j}\left(\frac{{}^{\pm}2}{M_{s,\max}}\right)^{H_j-1} \tag{76}$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}1=M\text{in}\left\{\left(\frac{{}^{\pm}c^{s-1}N_j^{s-1}}{\left(s-1\right)!}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u} \tag{77}$$

$$G\left(H_{j\le u},N_{j\le u}\right)=P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}1 \tag{78}$$

3) 若该方程已存在若干个解， 部分齐次方程组的解数，介于全部列的最大指数 $Max\left\{H_{i,j}\right\}_{i=1}^{s}$，及最小指数 $Min\left\{H_{i,j}\right\}_{i=1}^{s}$，对应的齐次方程的解数之间 (表达式及证明略)

证明 下面求解结果成立的先决条件是：该方程已存在若干个解，对未找到解的方程，本定理结果不一定成立

解题思路 哥数 =平均素数率＊ 平均整数率＊取值总数

或 哥数 =在定义域内对（素数率＊ 整数率）逐点求和

1) 当素数方程组是非齐次方程组时，求其广哥数 $G\left(u,s,N_j\right)$ 的值，等价于变量组 $\left\{\xi_i\right\}$，取自然数时，统计下列不定方程组

$$\begin{cases}\xi_1^{H_{1,u}}+\xi_2^{H_{2,u}}+\cdots\cdots+\xi_s^{H_{s,u}}=N_u\\ \xi_1^{H_{1,u-1}}+\xi_2^{H_{2,u-1}}+\cdots\cdots+\xi_s^{H_{s,u-1}}=N_{u-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi_1^{H_{1,1}}+\xi_2^{H_{2,1}}+\cdots\cdots+\xi_s^{H_{s,1}}=N_1\end{cases}\quad\begin{pmatrix}\xi_{i-1}\le\xi_i\\ 1=N_j\\ 1\le i\le s\\ 1\le j\le u\end{pmatrix} \tag{79}$$

中，ξ_i 全部是素数时，素数组 $\left\{\xi_i\right\}$ 的不同组合个数。该不定方程组由素数方程组中，将素数 p_i 用变量 ξ_i 代替获得。在上面不定方程组中，对任意第 j 行不定方程的变量 ξ_i，其定义域的上限 $M_{i,j}$，计算如下

$$N_j=\sum_{i=1}^{s}\xi_1^{H_{i,j}}=\sum_{R=1}^{i-1}R^{H_{R,j}}+\sum_{R=0}^{s-i}\left(M_{i,j}+R\right)^{H_{R,j}}$$

$$^{1}\left(M_{i,j}+R\right)^{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}} < N_j = \sum_{i=1}^{s}\xi_1^{H_{i,j}} < {}^{1}\left(s+1-i\right)\left(M_{i,j}+R\right)^{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}}$$

$$^{1}\left(N_j\right)^{\frac{1}{(s+1-i)H}} < M_{i,j} < {}^{1}\left(N_j\right)^{\frac{1}{H}} \quad , \qquad H = Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}$$

$$\frac{^{1}\ln N_j}{\left(s+1-i\right)Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}} < \ln M_{i,j} < \frac{^{1}\ln N_j}{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}}$$

$$\frac{^{1}\ln N_j}{\left(s+1-i\right)Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}} < \ln M_{i,j} < \frac{^{1}\ln N_j}{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}}$$

$$\ln M_{i,j} = {}^{\pm}c\left(\frac{1}{\left(s+1-i\right)}+1\right)\frac{\ln N_j}{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}} = \frac{^{\pm}c\ln N_j}{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}}$$

因$M_{i,j}$是变量ξ_i能取的最大值，它要求其它变量ξ_R取不同的最小值：下标小于i的变量ξ_i取小于 i 的自然数，即分别取 1 到$i-1$($\xi_1=1$，$\xi_2=2$，……，$\xi_{i-1}=i-1$),下标大于i的变量ξ_i取$M_{i,j}$加小于$R-i+1$的自然数($\xi_{i+1}=M_{i,j}+1$，$\xi_{i+2}=M_{i,j}+2$，……，$\xi_s=M_{i,j}+s-i$)，由于$\xi_{i-1}\le\xi_i$的约束，第 j 行不定方程的$M_{i,j}$由此获得。而对每一行不定方程均能获得一个对应的$M_{i,j}$，要让ξ_i取的最大值$M_{i,\max}$能满足所有的不定方程，只能让$M_{i,\max}$取$M_{i,j}$中的最小值

$$M_{i,\max} = Min\left\{M_{i,j}\right\}_{j=1}^{u} \quad , \qquad \ln M_{i,\max} = Min\left\{\ln M_{i,j}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\ln M_{i,\max} = Min\left\{\frac{^{\pm}c\ln N_j}{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\frac{1}{\ln M_{i,\max}} = Max\left\{\frac{Max\left\{H_{t,j}\right\}_{t=i}^{s}}{^{\pm}c\ln N_j}\right\}_{j=1}^{u}$$

得定理中$\ln M_{i,\max}$等的表达式

第 j 行的变量ξ_i的定义域可表为$\left(\xi_{i-1},M_{i,\max}\right)$。各行变量$\xi_i$出现素数的概率是不独立的，当任何一行的变量$\xi_i$全是素数时，整个不定方程组的$\xi_i$均是素数

不定方程组的变量ξ_i，各自及同时是素数的概率，分别记为$P\left(\xi_i\right)_p$、$P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p$，由于它

们是各自逐点连续取值，其出现素数的概率相互独立，则

$$P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p=\prod_{i=1}^{s}P\left(\xi_i\right)_p={}^{1}\prod_{i=1}^{s}P\left(\overline{\xi_i}\right)_p={}^{1}\prod_{i=1}^{s}P\left(0.5\left(M_{i,\max}+\xi_{i-1}\right)\right)_p$$

$$=\prod_{i=1}^{s}P\left({}^{\pm}cM_{i,\max}\right)_p=\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{\ln\left({}^{\pm}cM_{i,\max}\right)}=\prod_{i=1}^{s}\frac{{}^{1}1}{\ln M_{i,\max}} \qquad (80)$$

当第 j 行不定方程的变量 ξ_1 至 ξ_{s-1}，在各自定义域中，逐个取自然数时，在其不定方程的约束下，ξ_s 不一定能取整数，即还应考虑 ξ_s 出现整数的概率记为 $P\left(\xi_{s,j}\right)_{\text{int}}$，在 $\left(\xi_s^{H_{s,j}},\left(\xi_s+1\right)^{H_{s,j}}\right)$ 范围内的自然数中，有且仅有一个自然数是 ξ_s 为整数时的 $H_{s,j}$ 次幂，则

$$P\left(\xi_{s,j}\right)_{\text{int}}=\frac{1}{\left(\xi_s+1\right)^{H_{s,j}}-\xi_s^{H_{s,j}}}=\frac{1}{H_{s,j}\,\xi_s^{H_{s,j}-1}}=\frac{1}{H_{s,j}}\left(\frac{{}^{\pm}b}{M_{s,\max}}\right)^{H_{s,j}-1}$$

各行在 ξ_s 出现整数的概率 $P\left(\xi_{s,j}\right)_{\text{int}}$ 上是独立的，整个不定方程组的 ξ_s，同时出现整数的概率，记为 $P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$，则

$$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}=\prod_{j=1}^{u}P\left(\xi_{s,j}\right)_{\text{int}}=\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_{s,j}}\left(\frac{{}^{\pm}b}{M_{s,\max}}\right)^{H_{s,j}-1} \qquad (81)$$

不定方程组，出现广哥数的概率及个数，分别记为 $P\left(H_{i\le s,\,j\le u},N_{j\le u},\xi_{i,j}\right)$、$G\left(H_{i\le s,\,j\le u},N_{j\le u}\right)$，因素数率 $P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p$ 与整数率 $P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$ 相互独立，且只有 $s-1$ 个独立变量 ξ_i，则

$$P\left(H_{i\le s,\,j\le u},N_{j\le u},\xi_{i,j}\right)=P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{{}^{\pm}c}{\ln M_{i,\max}}\right)\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_{s,j}}\left(\frac{{}^{\pm}b}{M_{s,\max}}\right)^{H_{s,j}-1}$$

$$G\left(H_{i\le s,\,j\le u},N_{j\le u}\right)=\prod_{i=1}^{s}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}P\left(H_{i\le s,\,j\le u},N_{j\le u},\xi_i\right) \qquad \left(\xi_0=3\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}\prod_{i=1}^{s}Max\left\{\frac{{}^{1}H_j}{\ln N_j-\ln\left(s+1-i\right)}\right\}_{j=1}^{u}\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_j}\left(\frac{{}^{1}2}{M_{s,\max}}\right)^{H_j-1} \qquad \left(\xi_0=3\right)$$

得定理中$G\left(H_{i\le s,\,j\le u},N_{j\le u}\right)$表达式

2) 当素数方程组是齐次方程组时：令$H_{i,j}=H_j$，求其广哥数$G\left(k,s,N_j\right)$的值，等价于变量组$\left\{\xi_i\right\}$，取自然数时，统计下列不定方程组

$$\begin{cases} \xi_1^{H_u}+\xi_2^{H_u}+\cdots\cdots+\xi_s^{H_u}=N_u \\ \xi_1^{H_{u-1}}+\xi_2^{H_{u-1}}+\cdots\cdots+\xi_s^{H_{u-1}}=N_{u-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_1^{H_1}+\xi_2^{H_1}+\cdots\cdots+\xi_s^{H_1}=N_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \xi_{i-1}\le\xi_i \\ 1=N_j \\ 1\le i\le s \\ 1\le j\le u \end{pmatrix} \tag{82}$$

中，ξ_i全部是素数时，素数组$\left\{\xi_i\right\}$的不同组合个数。该不定方程组由素数方程组中，将素数p_i用变量ξ_i代替获得。

在上面不方程组中，对任意第j行不定方程的变量ξ_i，其定义域的上限$M_{i,j}$，计算如下

$$N_j=\sum_{i=1}^{s}\xi_1^{H_j}=\sum_{R=1}^{i-1}R^{H_j}+\sum_{R=0}^{s-i}\left(M_{i,j}+R\right)^{H_j}\,{=^1}\sum_{R=0}^{s-i}M_{i,j}^{H_j}\,{=^1}\left(s+1-i\right)M_{i,j}^{H_j}$$

$$M_{i,j}=\left(\frac{^1N_j}{s+1-i}\right)^{\frac{1}{H_j}},\qquad \ln M_{i,j}=\frac{^1 1}{H_j}\ln\frac{N_j}{s+1-i} \tag{83}$$

同理，因$M_{i,j}$是变量ξ_i能取的最大值，它要求其它变量ξ_R取不同的最小值，下标小于ξ_i的变量取小于i的自然数，下标大于ξ_i的变量取$M_{i,j}$加小于$R-i+1$的自然数，由于$\xi_{i-1}\le\xi_i$的约束，第j行不定方程的$M_{i,j}$由此获得。而对每一行不定方程均能获得一个对应的$M_{i,j}$，要让ξ_i取的最大值$M_{i,\max}$能满足所有的不定方程，只能让$M_{i,\max}$取$M_{i,j}$中的最小值

$$M_{i,\max}=Min\left\{M_{i,j}\right\}_{j=1}^{u}=M\text{in}\left\{\left(\frac{^1N_j}{s+1-i}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\frac{1}{M_{i,\max}}=Max\left\{\frac{1}{M_{i,j}}\right\}_{j=1}^{u}=Max\left\{\left(\frac{s+1-i}{^1N_j}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\frac{1}{M_{s,\max}} = Max\left\{\left(\frac{{}^{1}1}{N_j}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\ln M_{i,\max} = M\text{in}\left\{\ln M_{i,j}\right\}_{j=1}^{u} = M\text{in}\left\{\frac{{}^{1}1}{H_j}\ln\frac{N_j}{s+1-i}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\frac{1}{\ln M_{i,\max}} = Max\left\{\frac{1}{\ln M_{i,j}}\right\}_{j=1}^{u} = Max\left\{\frac{{}^{1}H_j}{\ln\frac{N_j}{s+1-i}}\right\}_{j=1}^{u} = Max\left\{\frac{{}^{1}H_j}{\ln N_j - \ln(s+1-i)}\right\}_{j=1}^{u}$$

，得定理中 $\ln M_{i,\max}$ 等的表达式

第 j 行的变量 ξ_i 的定义域可表为 $(\xi_{i-1}, M_{i,\max})$。各行变量 ξ_i 出现素数的概率是不独立的：

当任何一行的变量 ξ_i 全是素数时，整个不定方程组的 ξ_i 均是素数

不定方程组的变量 ξ_i，各自及同时是素数的概率，分别记为 $P(\xi_i)_p$、$P(\{\xi_i\})_p$，由于它们是各自逐点连续取值，其出现素数的概率相互独立，则

$$P(\{\xi_i\})_p = \prod_{i=1}^{s} P(\xi_i)_p ={}^{1} \prod_{i=1}^{s} P(\overline{\xi_i})_p ={}^{1} \prod_{i=1}^{s} P\left(0.5\left(M_{i,\max}+\xi_{i-1}\right)\right)_p$$

$$= \prod_{i=1}^{s} P\left({}^{\pm}cM_{i,\max}\right)_p = \prod_{i=1}^{s}\frac{1}{\ln\left({}^{\pm}cM_{i,\max}\right)} = \prod_{i=1}^{s}\frac{{}^{1}1}{\ln\left(M_{i,\max}\right)}$$

$$P(\{\xi_i\})_p = \prod_{i=1}^{s} Max\left\{\frac{{}^{1}H_j}{\ln N_j - \ln(s+1-i)}\right\}_{j=1}^{u}$$

得定理中 $P(\{\xi_i\})_p$ 的表达式

当第 j 行不定方程的变量 ξ_1 至 ξ_{s-1}，在各自定义域中，逐个取自然数时，在其不定方程的约束下，得到 ξ_s 的值不一定是整数，即还应考虑 ξ_s 出现整数的概率记为 $P(\xi_{s,j})_{\text{int}}$，对每一个 ξ_s 值而言，在 $\left(\xi_s^{H_{s,j}}, (\xi_s+1)^{H_{s,j}}\right)$ 范围内的自然数中，有且仅有一个自然数是 ξ_s 为整数时的 $H_{s,j}$ 次幂，则

$$P(\xi_{s,j})_{\text{int}} = \frac{1}{(\xi_s+1)^{H_j} - \xi_s^{H_j}} = \frac{1}{H_j\xi_s^{H_j-1}} = \frac{{}^{1}1}{H_j\left(\overline{\xi_s}\right)_s^{H_j-1}} = \frac{1}{H_j}\left(\frac{{}^{\pm}2}{M_{s,\max}}\right)^{H_j-1}$$

上式中ξ_s的平均值$\overline{\xi_s}$，接近它最大值$M_{s,\max}$的一半。各行在ξ_s出现整数的概率$P\left(\xi_{s,j}\right)_{\text{int}}$

上是独立的，整个不定方程组的ξ_s，同时出现整数的概率，记为$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$，则

$$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}} = \prod_{j=1}^{u} P\left(\xi_{s,j}\right)_{\text{int}} = \prod_{j=1}^{u} \frac{1}{H_j}\left(\frac{\pm 2}{M_{s,\max}}\right)^{H_j - 1}$$

得定理中$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$的表达式

不定方程组，出现广哥数的概率及个数，分别记为$P\left(H_{j\le u}, N_{j\le u}, \xi_{i,j}\right)$、$G\left(H_{j\le u}, N_{j\le u}\right)$，

因素数率$P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p$与整数率$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$相互独立，且只有$s-1$个变量$\xi_i$是独立的，且

$$\prod_{i=1}^{s-1} \sum_{\xi_i = \xi_{i-1}}^{M_{i,\max}} 1 = \prod_{i=1}^{s-1}\left(M_{i,\max} - \xi_{i-1}\right) = \prod_{i=1}^{s-1} {}^{\pm}cM_{i,\max} = \prod_{i=1}^{s-1} M\text{in}\left\{\left(\frac{\pm cN_j}{s+1-i}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\prod_{i=1}^{s-1} \sum_{\xi_i = \xi_{i-1}}^{M_{i,\max}} 1 = M\text{in}\left\{\left(\frac{\pm c^{s-1} N_j^{s-1}}{(s-1)!}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

则

$$P\left(H_{j\le u}, N_{j\le u}, \xi_{i,j}\right) = P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}$$

$$G\left(H_{j\le u}, N_{j\le u}\right) = \prod_{i=1}^{s-1} \sum_{\xi_i = \xi_{i-1}}^{M_{i,\max}} P\left(H_{j\le u}, N_{j\le u}, \xi_{i,j}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{s-1} \sum_{\xi_i = \xi_{i-1}}^{M_{i,\max}} P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p P\left(\xi_s\right)_{\text{int}} = P\left(\left\{\xi_i\right\}\right)_p P\left(\xi_s\right)_{\text{int}} \prod_{i=1}^{s-1} \sum_{\xi_i = \xi_{i-1}}^{M_{i,\max}} 1$$

得定理中$G\left(H_{j\le u}, N_{j\le u}\right)$等表达式

6.9.2 华林——哥德巴赫问题

定义 255 华林——哥德巴赫问题[wy] P63，指下面 u 次幂素数方程

$$p_1^u + p_2^u + \cdots\cdots p_s^u = N \qquad \left(3 \le p_{i-1} \le p_i, s = N, u = N, 1 = N\right) \tag{84}$$

的解$\left\{p_i\right\}$，将此素数组$\left\{p_i\right\}$的不同组合个数，称为华林------哥德巴赫数，简称华哥数

定理 256 将华哥数记为$Hg\left(u,s,N\right)$，若该方程已存在若干个解，则

$$Hg(u,s,N)=\frac{\pm 2^{u-1}c^{\frac{s}{u}}u^{s-1}}{\sqrt[u]{(s-1)!}\ln^{s}N}N^{\frac{s-u}{u}} \tag{85}$$

s 与 N 同是奇数或同是偶数，$s\geq u+1$ 是 N 满足大时，华哥数有解的充分条件

$$s\geq u+1 \tag{86}$$

证明　华林------哥德巴赫问题，等价于在齐次素数方程组的解

中，k 用 1 代替，H_j 用 k 代替，N_j 用 N 代替，则

$$\frac{1}{M_{s,\max}}=Max\left\{\left(\frac{1}{N_j}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{k}\Bigg|_{\substack{H_j=u\\N_j=N\\u=1}}=\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{u}}$$

$$P(\{\xi_i\})_p=\prod_{i=1}^{s}Max\left\{\frac{H_j}{\ln N_j-\ln(s+1-i)}\right\}_{j=1}^{u}\Bigg|_{\substack{H_j=u\\N_j=N\\u=1}}=\prod_{i=1}^{s}\frac{u}{\ln N-\ln(s+1-i)}=\frac{u^s}{\ln^s N}$$

$$P(\xi_s)_{\text{int}}=\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_j}\left(\frac{\pm 2}{M_{s,\max}}\right)^{H_j-1}\Bigg|_{\substack{H_j=u\\N_j=N\\u=1}}=\prod_{j=1}^{1}\frac{1}{u}\left(\frac{\pm 2}{M_{s,\max}}\right)^{u-1}$$

$$=\frac{1}{u}\left(\frac{\pm 2}{M_{s,\max}}\right)^{u-1}=\frac{\pm 2^{u-1}}{u}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{u-1}{u}}$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}1=M\text{in}\left\{\left(\frac{\pm c^{s-1}N_j^{s-1}}{(s-1)!}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}\Bigg|_{\substack{H_j=u\\N_j=N\\u=1}}=\frac{(\pm cN)^{\frac{s-1}{u}}}{\sqrt[u]{(s-1)!}}$$

本定理素数方程组的解数及有解的必要条件为

$$Hg(u,s,N)=P(\{\xi_i\})_p P(\xi_s)_{\text{int}}\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}1$$

$$=\frac{u^s}{\ln^s N}\frac{\pm 2^{u-1}}{u}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{u-1}{u}}\frac{(\pm cN)^{\frac{s-1}{u}}}{\sqrt[u]{(s-1)!}}=\frac{\pm 2^{u-1}c^{\frac{s-1}{u}}u^{s-1}}{\sqrt[u]{(s-1)!}\ln^{s}N}N^{\frac{s-u}{u}}?\ 1$$

得(85)式。对上式右边 2 项取对数，得

$$(u-1)\ln 2 + \frac{s-1}{u}\ln c + (s-1)\ln u + \frac{s-u}{u}\ln N \ ? \ \frac{1}{u}\left(\ln(s-1)!\right) + s\ln\ln N$$

因$s = N, u = N, 1 = N$，化简上式，得

$$\frac{s-u}{u}\ln N \ ? \ s\ln\ln N$$

$$\ln N \ ? \ \frac{us}{s-u}\ln\ln N$$

$$s \geq u+1$$

得(86)式

6. 9.3 华罗庚------哥德巴赫问题

定义 11 华罗庚——哥德巴赫问题[wy] P65，指在素数方程

$$\begin{cases} p_1^u + p_2^u + \cdots\cdots + p_s^u = N_u \\ p_1^{u-1} + p_2^{u-1} + \cdots\cdots + p_s^{u-1} = N_{u-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_s = N_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} p_{i-1} \leq p_i \\ 1 = N_j \\ u = N_j \\ s = N_j \\ 1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq u \end{pmatrix} \qquad (87)$$

中的解$\{p_i\}$的问题，$\{p_i\}$的不同组合个数，即$H_{i,j} = j$时的广哥数，称为华罗庚——哥德巴赫数，简称华罗庚哥数

定理 24 华罗庚哥数记为$Hg\left(H_j = j, s, N_{j\leq u}\right)$，若该方程已存在若干个解，则

$$P\left(\{\xi_i\}\right)_p = Max\left\{\frac{{}^{1}j^{s}}{\ln^s N_j}\right\}_{j=1}^{u} \qquad (88)$$

$$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}} = \frac{1}{u!} Max\left\{\left(\frac{\pm 2}{N_j}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u} \qquad (89)$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}} 1 = M\text{in}\left\{\left(\frac{\pm c^{s-1}N_j^{s-1}}{s!}\right)^{\frac{1}{j}}\right\}_{j=1}^{u} \qquad (90)$$

$$Hg\left(H_{j\le u},N_{j\le u}\right)=\frac{1}{u!}Max\left\{\frac{j^{s}}{\ln^{s}N_{j}}\left(\frac{\pm 2}{N_{j}}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}M\text{in}\left\{\frac{\left(\pm cN_{j}\right)^{\frac{s-1}{j}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}}\right\}_{j=1}^{u}\qquad(91)$$

在素数方程组中，N_j 的奇偶性与 s 相同时，有解的必要条件是

$$s\ge u^{2}-u+2\qquad(92)$$

当该方程组有若干个解时，此条件为充分条件

证明　在齐次素数方程组的解中，引入 $H_j=j$ 计算本定理的表达式(24)至(27)

$$P\left(\{\xi_i\}\right)_p=\prod_{i=1}^{s}Max\left\{\frac{{}^{1}H_{j}}{\ln N_{j}-\ln(s+1-i)}\right\}_{j=1}^{u}\Bigg|^{H_j=j}=Max\left\{\frac{{}^{1}j^{s}}{\ln^{s}N_{j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}=Max\left\{\left(\frac{\pm 2}{N_{j}}\right)^{u\frac{H_j-1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{H_{j}}\Bigg|^{H_j=j}=Max\left\{\left(\frac{\pm 2}{N_{j}}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}\prod_{j=1}^{u}\frac{1}{j}$$

$$P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}=\frac{1}{u!}Max\left\{\left(\frac{\pm 2}{N_{j}}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}1=M\text{in}\left\{\left(\frac{\pm c^{s-1}N_{j}^{s-1}}{(s-1)!}\right)^{\frac{1}{H_j}}\right\}_{j=1}^{u}\Bigg|^{H_j=j}=M\text{in}\left\{\left(\frac{\pm c^{s-1}N_{j}^{s-1}}{(s-1)!}\right)^{\frac{1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$=M\text{in}\left\{\frac{\left(\pm cN_{j}\right)^{\frac{s-1}{j}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}}\right\}_{j=1}^{u}$$

本定理中，素数方程组的解数记为 $Hg\left(H_{j\le u},N_{j\le u}\right)$，则

$$Hg\left(H_{j\le u},N_{j\le u}\right)=P\left(\{\xi_i\}\right)_p P\left(\xi_s\right)_{\text{int}}\prod_{i=1}^{s-1}\sum_{\xi_i=\xi_{i-1}}^{M_{i,\max}}1$$

$$=Max\left\{\frac{{}^{1}j^{s}}{\ln^{s}N_j}\right\}_{j=1}^{u}\frac{1}{u!}Max\left\{\left(\frac{\pm 2}{N_j}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}\quad M\text{in}\left\{\frac{\left(\pm cN_j\right)^{\frac{s-1}{j}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$=\frac{1}{u!}Max\left\{\frac{j^{s}}{\ln^{s}N_j}\left(\frac{\pm 2}{N_j}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}\quad M\text{in}\left\{\frac{\left(\pm cN_j\right)^{\frac{s-1}{j}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\geq\frac{1}{u!}Min\left\{\frac{j^{s}}{\ln^{s}N_j}\left(\frac{\pm 2}{N_j}\right)^{u\frac{j-1}{j}}\right\}_{j=1}^{u}\quad M\text{in}\left\{\frac{\left(\pm cN_j\right)^{\frac{s-1}{j}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}}\right\}_{j=1}^{u}$$

$$\geq\frac{1}{u!}Min\left\{\frac{j^{s}\left(\pm cN_j\right)^{\frac{s-1+u-uj}{j}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}\ln^{s}N_j}\right\}_{j=1}^{u}\geq\frac{1}{u!}Min\left\{\frac{j^{s}\left(\pm cN_j\right)^{\frac{s-1+u-u^2}{u}}}{\sqrt[j]{(s-1)!}\ln^{s}N_j}\right\}_{j=1}^{u}\ ?\ 1$$

对上式取对数，并使用原方程条件：$s=N_j, u=N_j, 1=N_j$ 进行简化，得

$$\frac{s-1+u-u^2}{u}\ln N_j\ ?\ s\ln\ln N_j$$

$$\left(s-1+u-u^2\right)\div u>\delta\quad,\quad s-1+u-u^2>\delta u$$

$$s>u^2-(1-\delta)u+1\geq u^2-u+2$$

得(92)式

可将(67)式表达的广义哥德巴赫方程进一步推广，将 p_i 用 $p_{i,j}$ 代替，并取消 $p_{i-1}<p_i$ 条件，就得到一个更一般的广义哥德巴赫方程，即

$$\begin{cases} p_{1,u}^{H_{1,u}}+p_{2,u}^{H_{2,u}}+\cdots\cdots+p_{s,u}^{H_{s,u}}=N_u \\ p_{1,u-1}^{H_{1,u-1}}+p_{2,u-1}^{H_{2,u-1}}+\cdots\cdots+p_{s,u-1}^{H_{s,u-1}}=N_{u-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{1,1}^{H_{1,1}}+p_{2,1}^{H_{2,1}}+\cdots\cdots+p_{s,1}^{H_{s,1}}=N_1 \end{cases}\quad\begin{pmatrix}1=N_j\\1\leq i\leq s\\1\leq j\leq u\end{pmatrix}\qquad(93)$$

在广义哥德巴赫方程(93)式中，还可以加上如下条件：

$$\begin{cases} s = u \\ H_{i,j} = 1 \\ N_j = \sum_{j=1}^{u} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{u} p_{s+1-j,j} = N \\ \qquad\qquad (1 \le i \le s) \end{cases} \quad (94)$$

素数方程(93)式的解法与素数方程(67)式相似；(93)式与(94)式构成的联合素数方程的解法，仍与素数方程(67)式相似，均不在此讨论。仅作以下说明：

此联合素数方程，就是一般所说的素数方阵，当把变量$p_{i,j}$放宽为自然数时，就得到整数方阵（表达式略），最小三阶整数方阵如下：

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (95)$$

上面三阶整数方阵中，在水平、垂直及对角线三个方向的三个数之和均等于 15。

在联合方程(93)、(94)式中，变量个数为s^2个，方程个数$2s+2$个，由方程理论可知：当$3 \le s$时，变量个数多于方程组个数，即不少于三阶的方阵满足有无穷个解的必要条件，原则上本方法能定量分析某范围内方阵解的个数。

第七章　K 生素数

本章主要从以下三方面研究 K 生素数，在自然数中出现的规律

1、随相邻素数间距变化的规律

2、随 K 值变化的规律

3、指定 K 生素数的分布规律

可将以上规律推广到整值函数中（此略）

7. 1　二生素数问题

7. 1.1 K 生素数定义及表达

定义 1　两相邻素数$\left(p_n, p_{n+1}\right)$、$\left(p, p+d_1\right)$之差 $p_{n+1}-p_n$ 和 d_1，称为相邻素数$\left(p_n, p_{n+1}\right)$或$\left(p, p+d_1\right)$的间距或素段的段长，可将 $p_{n+1}-p_n$ 记为 d，则

$$d=p_{n+1}-p_n$$

定义 2　当 K 个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 均两两相邻，称它们是 K 个相邻素数；如存在若干组 K 个相邻素数中，对应素数间距相同时，称这 K 个素数是指定素数间距的 K 生素数，简称 K 生素数。可记为 $p,p+\sum_{i=1}^{1-1}d_i$，$\cdots$，$p+\sum_{i=1}^{k-1}d_i$，可简写为 $p\langle p_1|d_1,d_2,\cdots,d_{k-1}\rangle$、$p\langle p_1|d_{k-1}\rangle$、$p\langle d_{k-1}\rangle$、$\langle d_1,d_2,\cdots,d_{k-1}\rangle$或$\langle d_{k-1}\rangle$等，将 $p_1\langle p_1|d_{k-1}\rangle$称为最小 K 生素数；表达式$\langle d_{k-1}\rangle$中的符号：“〈 〉”称为棱形括号，简称棱括号，用它表示 K 生素数；同理，将 d_i 表达如下：

$$d_i=p_{i+1}-p_i \qquad \left(1\le i\le k-1\right)$$

K 生素数有三个要素：

1、 K 个素数两两相邻；

2、 需指定 $K-1$ 个相邻素数之间的间距；

3、自然数中有较多这样的素数组合（否则没统计意义）

定义 3 在 K 个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 中，最小素数 p_1 称为 K 小素数，最大素数 p_k 称为 K 大素数，将 K 大素数的大小，作为 K 生素数的大小

K 小素数的定义，是根据东陆论坛网友李明波、天山草等网友，给出的孪小素数定义，推广得到 K 生素数中，致谢！

因 K 大素数的大小，作为 K 生素数的大小，在不易混淆时，可直接用 K 生素数代替 K 大素数进行叙述

定义 4　不大于 N 的自然数中，形如 $p\langle d_{k-1}\rangle$ 或 $\langle d_{k-1}\rangle$ 的 K 生素数的个数，称为 K 生素数定理，记为 $\pi\left(N, p\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 或 $\pi\left(N, \langle d_{k-1}\rangle\right)$ 、$\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 。结合素数定理 $\pi\left(N\right)$ 表达如下：

$$\left.\begin{array}{l}\pi\left(N\right)=\sum\limits_{p\le N}1\\ \pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)=\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)=\pi\left(N,p\langle d_{k-1}\rangle\right)=\sum\limits_{p\langle d_{k-1}\rangle\le N}1=\sum\limits_{\langle d_{k-1}\rangle\le N}1\end{array}\right\}$$

在上面定义的表达式中，当 K=1 时，两者等价：

$$\pi\left(N, p\langle d_{k-1}\rangle\right)\Big|_{k=1}=\pi\left(N\right)$$

否则，对两者的理解如下：

在 N 内的自然数中，每出现一个形如 p 的素数，就用 Σ 累加一次，总个数表为 $\pi\left(N\right)$；同理，在 N 内的自然数中，每出现一个形如 $p\langle d_{k-1}\rangle$ 或 $\langle d_{k-1}\rangle$ 的 K 生素数，就用 Σ 累加一次，总个数表为 $\pi\left(N, p\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 、$\pi\left(N, \langle d_{k-1}\rangle\right)$ 或 $\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)$

注意：三个表达式：$\pi\left(N, p\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 、$\pi\left(N, \langle d_{k-1}\rangle\right)$ 或 $\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 数学意义相同，在 $\pi\left(N, \langle d_{k-1}\rangle\right)$ 中可标记也可不标记逗号“，”，但在 $\pi\left(N, p\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 中必须标记逗号“，”，否则，$\pi\left(Np\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 就变成了表示 Np 范围内的 K 生素数个数

定义 5 在 K 生素数中，K 个素数间的 $k-1$ 间距之和 $\sum_{i=1}^{k-1} d_i$，称为 K 生素数的段长。

在K生素数中叙述段长时，要指明是K生素数的段长$\sum_{i=1}^{k-1} d_i$，还是K生素数内某两相邻素数间的段长d_i

定义6 N内自然数中，如果K生素数$\langle d_1, d_2, \cdots, d_{k-1} \rangle$存在多个对应段长相同且总段长最短或最长的K生素数，称它们为最密或最稀K生素数，记为$^{\downarrow}\langle d_{k-1} \rangle$、$^{\uparrow}\langle d_{k-1} \rangle$。即它段长的下界或上界 ，记为$^{\downarrow}d\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$、$^{\downarrow}D\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$、$^{\uparrow}d\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$、$^{\uparrow}D\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$。因后面可证明下界与N无关，故下界可简写为$^{\downarrow}d\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$^{\downarrow}D\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$。如

最密2生素数： $p, p+2$（即孪生素数），可简写为$^{\downarrow}\langle d_1 \rangle$ 等

最密3生素数：$p, p+2, p+6$（不是3， 5 ，7），可简写为$^{\downarrow}\langle d_2 \rangle$ 等

最密4生素数：$p, p+2, p+6, p+8$，可简写为$^{\downarrow}\langle \mathrm{d}_3 \rangle$等

最密5生素数：$p, p+2, p+6, p+8, p+12$，可简写为$^{\downarrow}\langle d_4 \rangle$ 等

最密6生素数：$p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+18$，可简写为$^{\downarrow}\langle d_5 \rangle$等

最密7生素数：$p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+18, p+20$，可简写为$^{\downarrow}\langle d_6 \rangle$等

最密8生素数：$p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+18, p+20, p+26$，可简写为$^{\downarrow}\langle d_7 \rangle$等

…………

前12生素数简写成

$p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+18, p+20, p+26$

可见东陆论坛网友：dlbl7127，
在网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=30681&Forum_ID=7
关于K生素数问题发帖：

10^12 之 内

素 数 37607912018个
孪 生 素 数 1870585220对
三 生 素 数 152850135组

四	生	素	数	16009283 组
五	生	素	数	1984147 组
六	生	素	数	210061 组
七	生	素	数	24703 组
八	生	素	数	2924 组
九	生	素	数	321 组
十	生	素	数	65 组
11	生	素	数	12 组

12 生素数 2 打

$p \le N$ 的 K 生素数 $\langle d_{k-1} \rangle$ 出现的频率、概率、个数、边界及均方差等量，可表为 $\rho(\langle d_{k-1} \rangle)$、$P(\langle d_{k-1} \rangle)$、$\pi(\langle d_{k-1} \rangle)$、$\Pi(\langle d_{k-1} \rangle)$、$\pi(\langle d_{k-1} \rangle)$、$\Pi(\langle d_{k-1} \rangle)$、$\sigma(\langle d_{k-1} \rangle)$

具体类型的 K 生素数，用较适合的表达式即可，因刚开始对 K 生素数及相关量进行系统研究，它们的表达方法，可根据需要或方便而定，使用前进行说明即可，不限于某种固定形式

下面分析自然数中，K 生素数的分布规律，由此可将它推广到任意函数中，K 生素数的分布规律

7. 1.2 二生素数的分布

二生素数就是相邻素数 (p_1, p_2)，其段长记为 $2x$，则

$$2x = p_2 - p_1$$

定义 8 小于 N 的自然数中，素段长度接近 2 、$2^{\uparrow} d(N)$,或素段个数最多附近的素段，分别称为低端素段、高端素段及中端 素段，简称低端、高端或中端

推理 1 $t \le N$ 的自然数中，实际及理论素数个数，记为 $\pi(N)$ 及 $\Pi(N)$，它们将 $(1, N)$ 这段自然数，分成了 $\pi(N)$ 或 $\Pi(N)$ 个素段 ，其最短最长段长——素段边界的实际及理论值，分别记为 $2^{\downarrow} d(N)$、$2^{\uparrow} d(N)$、$2^{\downarrow} D(N)$、$2^{\uparrow} D(N)$

证明 略

引理 1 将 $t \le N$ 的自然数中，段长为 $2x$ 的素段 (p_1, p_2) 出现实际及理论个数，记为 $\pi(N, x)$ 及 $\Pi(N, x)$，它们出现的频率及概率，记为 $\rho(t, x)$、$P(t, x)$，它们在 $(1, N)$ 内

的平均频率及概率分布函数，记为$\overline{\rho}(N,x)$，及$\overline{P}(N,x)$，则

$$\overline{\rho}(N,x)=\frac{\pi(N,x)}{\pi(N)}=^{1}\overline{P}(N,x)=\frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)} \tag{1}$$

$$\Pi(N,x)=\int^{N}P(t,x)\,dt \tag{2}$$

$$P(N,x)=\frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x)\Pi(N)\ ,\ P(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(t,x)\Pi(t) \tag{3}$$

$$P(t,x)=\left[\Pi(t)-\Pi(t-1)\right]\left[\Pi(t-x)-\Pi(t-x-1)\right]$$

$$\prod_{J=1}^{x-1}\left[1-\Pi(t-J)+\Pi(t-J-1)\right] \tag{4}$$

$$\sum_{x=1}^{\uparrow 0.5d(N,2)}2x\overline{\rho}(N,x)=\frac{^{1}N}{\pi(N)} \tag{5}$$

$$\int_{0}^{\infty}2x\overline{P}(N,x)\,dx=\frac{^{1}N}{\Pi(N)} \tag{6}$$

证明　将$t\le N$的自然数中，段长为$2x$的素段出现的个数，记为$\pi(N,x)$及$\Pi(N,x)$，此$\pi(N)$、$\Pi(N)$个素数将$(1,N)$分割成$\pi(N)$、$\Pi(N)$个素段，故

$$\overline{\rho}(N,x)=\frac{\pi(N,x)}{\pi(N)}\quad,\quad\overline{P}(N,x)=\frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)}$$

得本引理 $\overline{\rho}(N,x)$及$\overline{P}(N,x)$表达式(1)，(1)或上式变形显然得

$$\Pi(N,x)=\Pi(N)\ \overline{P}(N,x)=\int^{N}P(t,x)\,dt$$

得(2)，对上式取积分上限N的偏导得(3)

下式的意思是　当t与$t-x$同时是素数时，则

$$\left[\pi(t)-\pi(t-1)\right]\left[\pi(t-2x)-\pi(t-2x-1)\right]=1$$

当$(t-2x,t)$内没有素数时，有

$$\prod_{J=1}^{2x-1}\left[1-\pi(t-J)+\pi(t-J-1)\right]=1$$

此时的 t 与 $t-2x$ 是间距为 $2x$ 的相邻素数，故出现的频率 $\rho(t,x)=1$，得本引理 $\rho(t,x)$ 的表达式 (4)

值为 $2x$ 的素段，乘以它在(1，N)内出现的次数 $\pi(N,x)$ 或 $\Pi(N,x)$，就是这种素段，在(1，N)内的累计长度，记为 $m(N,x)$ 及 $M(N,x)$

$$m(N,x)=2x\pi(N,x)=2x\overline{\rho}(N,x)$$

$$M(N,x)=2x\Pi(N,x)=2x\overline{P}(N,x)\Pi(N) \qquad (7)$$

x 在定义域 $\left(1,{}^{\uparrow}d(N)\right)$ 内，对各种素段的累计长度求和，就得到(1，N)内的各种素段总长度记为 $m(N)$ 或 $M(N)$。显然，当 N

是素数时 $m(N)=N$；否则 $N-m(N)$ 的值，不大于 N 内素段 的最大段长 $2^{\uparrow}d(N)$，后面将证明

$${}^{\uparrow}d(N)={}^{\pm}\ln^2 N$$

则

$$m(N)=\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}d(N)}m(N,x)=\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}d(N)}2x\pi(N,x)=\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}d(N)}2x\pi(N)\overline{\rho}(N,x)={}^{1}N$$

$$M(N)=\int_0^{{}^{\uparrow}D(N)}M(N,x)\,dx={}^{1}\int_0^{\infty}2x\Pi(N,x)\,dx={}^{1}\int_0^{\infty}2x\Pi(N)\overline{P}(N,x)Ndx$$

上式变形得本引理 $m(N)$、$M(N)$ 的表达式 (5)、(6)

7. 1.3 二生素数的正指性

暂无法对 (7) 中的 $\overline{P}(N,x)$、$P(N,x)$ 等进行严格求解，下面分析它们的规律，为求近似解作准备

引理 2

$$\overline{P}(N,x)={}^{1}\frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)}=\begin{cases}{}^{1}P_n(N,x) & (x<x_m)\\ {}^{1}P_e(N,x) & (x_m\le x)\end{cases} \qquad (8)$$

$$P_n(N,x)={}^{\pm}2C_nP_n(N,x)_0=\frac{{}^{\pm}2C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)\quad (x<x_m) \qquad (9)$$

$$P_e(N,x)={}^{\pm}C_eP_e(N,x)_0=\frac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)\quad (x_m\le x) \qquad (10)$$

其中 ${}^{\pm}C_n$、${}^{\pm}C_e$ 可称为标准概率分布函数系数

证明　先分析 N 充分大时，$\overline{P}(N,x)$ 的近似分布类型

正态分布——多因子分析法

概率论指出　某量在作用都不太大的众多因素影响下，将呈正态分布[4]P121

大于 Y 的自然数中，素段长度的分布，将受到不大于 $\sqrt{Y}$ 的 $\pi\left(\sqrt{Y}\right)$ 个素数的影响，当 Y 充分大时，就满足了众多因素影响的条件

素数 p 对素段长度的影响，将反比于 p 值大小，影响最大的就是最小素数 2，它把间距是 1 的自然数，变成间距是 2 的偶数间的间距，即素数 2 使"素段"间距增大了 1。与 $\le N$ 的自然数中，素段平均长度约为 $\ln N$ 相比，约占 $\ln N$ 分之 1，当 N 充分大时，能满足每个素数 p，对素段长度分布的影响，都不太大的条件，使 $P(N,x)$ 趋近正态分布，得 (8) 的上部分

指数分布——寿命分析法

概率论指出　各种寿命现象的分布，趋近指数分布[4]P125 让变量 Y 在自然数中，从 1 到 N 匀速逐个取值，它运行在任何一个素段的“寿命”结束时，标志着它运行在下一个素段“寿命”的开始，形成了“寿命”现象的分布，故它又趋近指数分布

由上面正指性分析，可将 $(1,N)$ 内段长为 $2x$ 的二生素数的段长平均概率分布函数记为 $\overline{P}(N,x)$，得 (8)

将(归一化的)标准正态及指数分布函数，分别表为 $P_n(N,x)_0$ 及 $P_e(N,x)_0$，则

$$P_n(N,x)_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)(-\infty<x<\infty) \qquad (11)$$

$$P_e(N,x)_0=\frac{1}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)\quad(0<x<\infty) \qquad (12)$$

$P_n(N,x)$ 的值，应接近“边界”一章定义过的单边正态分布函数——它的值是标准正态分布函数 $P_n(N,x)_0$ 的两倍得 (9)；概率指数分布函数 $P_e(N,x)$ 的值，应接近标准形式 $P_e(N,x)_0$ 得 (10)

定义 9 将二生素数的素段长度分布，既含正态分布，又具指数分布的双重特性，称为二生素数的正态指数分布性,简称正指性

推理 2 概率论指出：有定论，正态分布、指数分布等概率事件，具有传递性：由这类分布事件组成的复合概率事件，也具有相同概率分布特征，故可将正指性推广到 K 生素数中[5]P126

. 1.4 二生素数定理

发帖网址

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23891&Forum_ID=9

定理 1 $t\le N$ 的自然数中，段长为 $2x$ 的二生素数出现的频率、概率、两者的平均值记为 $\rho(t,x)$、$P(t,x)$、$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$，在它们的正指性中，段长为 $2x$ 的归一化的正态布函数记为 $P_n(N,x)$，指数分布函数记为 $P_e(N,x)$，二生素数出现的个数——二生素数定理，记为 $\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$，则

$$\overline{P}(N,x)=P_n(N,x)=\frac{{}^{\pm}2C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)=\frac{{}^{\pm}4C_n\pi(N)}{\pi N}\exp\left(\frac{-4\pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}4C_n}{\pi\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\qquad\left(\sigma_n={}^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,N}{4\pi(N)}={}^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,\ln N}{4},\ x\le x_m\right) \qquad (13)$$

$$\overline{P}(N,x)=P_e(N,x)=\frac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)=\frac{{}^{\pm}2C_e\pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{2\pi(N)x}{N}\right)$$

$$=\frac{^{\pm}2C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\quad\left(\sigma_e=\frac{^{\pm}N}{2\pi(N)}=\frac{^{\pm}\ln N}{2}\,,\quad x_m\le x\right)\tag{14}$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_e}=^{\pm}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=^{\pm}0.7979\tag{15}$$

$$P(t,x)=\frac{^{\pm}8C}{\pi}\left[\frac{li(t)}{t\ln t}-\frac{li^2(t)}{2t^2}-\frac{4li^3(t)x^2}{\pi t^3\ln t}+\frac{4li^4(t)x^2}{\pi t^4}\right]\exp\left(\frac{-4li^2(t)x^2}{\pi t^2}\right)$$

$$\left(x\le x_m,1=t\right)\tag{16}$$

$$P(t,x)=^{\pm}2C_e\left(\frac{1}{t\ln t}-\frac{li(t)}{t^2}\right)\left(1-\frac{2li(t)}{t}\right)\exp\left(-\frac{2li(t)x}{t}\right)$$

$$\left(x_m\le x,1=t\right)\tag{17}$$

$$^{\pm}\overline{C}_n=^{\pm}\overline{C}_e=1\tag{18}$$

$$x_m=\frac{\sigma_n^2}{\sigma_e}\left(1+\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right)=^{1}\frac{\pi N}{4\pi(N)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=^{\pm}2.070\sigma_n=^{\pm}2.594\sigma_e=^{\pm}1.297\ln N\tag{19}$$

$$\pi(N,x)=^{1}\Pi(N,x)=^{1}\Pi(N)\overline{P}(N,x)$$

$$=\begin{cases}^{1}\Pi(N)P_n(N,x)=\dfrac{^{\pm}4C_n\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\dfrac{-4\Pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right) & (x\le x_m)\\ ^{1}\Pi(N)P_e(N,x)=\dfrac{^{\pm}2C_e\Pi^2(N)}{N}\exp\left(-\dfrac{2\Pi(N)x}{N}\right) & (x_m\le x)\end{cases}\tag{20}$$

其中 $\sigma_n(N)$ 及 $\sigma_e(N)$ 是正态及指数分布的均方差；$2x_m$ 是二生素数段长正态及指数分布的分界点——等值点；$^{\pm}C_n$ 或 $^{\pm}C_e$ 是同阶函数形式的素率系数，以标准的正态分布或指数分布为权， 在段长 $2x$ 的定义域内，对 $^{\pm}C_n$ 、 $^{\pm}C_e$ 进行加权平均的值记为 $^{\pm}\overline{C}_n$ 、 $^{\pm}\overline{C}_e$

证明　既然归一化的 $P_n(N,x)$ 及 $P_e(N,x)$

$$\int_0^{\infty}P_n(N,x)\,dx=\int_0^{\infty}{}^{\pm}2C_nP_n(N,x)_0\,dx=1\tag{21}$$

$$\int_0^\infty P_e(N,x)\,dx=\int_0^\infty {}^{\pm}C_e P_e(N,x)_0\,dx=1 \tag{22}$$

分别接近于标准的正态分布 $P_n(N,x)_0$ 的两倍，或指数分布 $P_e(N,x)_0$。将 ${}^{\pm}C_n$ 以标准正态分布函数 $P_n(N,x)_0$ 为权，在段长 $2x$ 的定义域内进行加权平均值表为 ${}^{\pm}\overline{C}_n$，或将 ${}^{\pm}C_e$ 以指数分布函数 $P_e(N,x)_0$ 为权，在段长 $2x$ 的定义域内进行加权平均值表为 ${}^{\pm}\overline{C}_e$，则

$${}^{\pm}\overline{C}_n=\frac{\int_0^\infty {}^{\pm}2C_n P_n(N,x)_0\,dx}{\int_0^\infty P_n(N,x)_0\,dx}=\int_0^\infty P_n(N,x)\,dx=1$$

$${}^{\pm}\overline{C}_e=\frac{\int_0^\infty {}^{\pm}C_e P_e(N,x)_0\,dx}{\int_0^\infty P_e(N,x)_0\,dx}=\int_0^\infty P_e(N,x)\,dx=1$$

即 ${}^{\pm}\overline{C}_n$ 或 ${}^{\pm}\overline{C}_e$ 均等于 1 得(18)式

将(9)式代入(6)式，用 ${}^{\pm}\overline{C}_n=1$ 近似代替 ${}^{\pm}C_n$，计算 $\sigma_n(N)$ 的渐近解得

$$\frac{N}{\Pi(N)}={}^{1}\int_0^\infty 2x\overline{P}(N,x)\,dx={}^{1}\int_0^\infty 2xP_n(N,x)\,dx=\int_0^\infty 2x\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)dx$$

$$=-\frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty {}^{\pm}\overline{C}_n\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)d\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)=-\frac{{}^{\pm}4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}$$

整理上式得(13)式中 σ_n 的表达式，利用 σ_n 有

$$\overline{P}(N,x)=P_n(N,x)=\frac{8^{\pm}C_n\Pi(N)}{\sqrt{2\pi}\,{}^{1}\sqrt{2\pi}\,N}\exp\left(\frac{-16\Pi^2(N)x^2}{2\left(\sqrt{2\pi}\,N\right)^2}\right)\quad(x\le x_m)$$

整理上式得(13)式的后一部分表达式

同理，将(10)式代入(6)式，用 ${}^{\pm}\overline{C}_e=1$ 近似代替 ${}^{\pm}C_e$ 的值，计算 σ_e 的渐近解得

$$\frac{N}{\Pi(N)}=\int_0^\infty {}^{1}2x\overline{P}(N,x)\,dx=\int_0^\infty {}^{1}2xP_e(N,x)\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} 2x\frac{^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)dx=-2^{\pm}\int_0^{\infty} x^{\pm}\overline{C}_e d\exp\left(\frac{-x}{\sigma_e}\right)$$

$$=^{1} 2\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{-x}{\sigma_e}\right)dx=-^{1}2\sigma_e\exp\left(\frac{-x}{\sigma_e}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=^{1} 2\sigma_e$$

整理上式得(14)式中σ_e的表达式，利用σ_e 有

$$\overline{P}(N,x)=P_e(N,x)=\frac{2^{\pm}C_e\Pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{2\Pi(N)x}{N}\right)\quad(x_m\le x)$$

得(14)式的后一部分表达式

由(13)式及(14)式得(15)式

统计实际数据显示：低端趋近正态分布，高端趋近指数分布，中端两种分布均接近。故在中端，以正指分布的等值点，记为$2x_m$为界，低端用正态分布，高端用指数分布,分别单独近似描述$\overline{P}(N,x)$，可得(13)式、(14)式的全部表达内容

下面给$2x_m$定义一个名称：

定义 10 段长等于$2x_m$的点，既是$\overline{P}(N,x)$正态分布与指数分布的等值点，又是两种分布的分界点，称为正指分界点，简称分界点。将低端称为正态分布区，将高端称为指数分布区

由(1)式、(13)式、(14)式，得(15)式及

$$\pi(N,x)=^{1}\Pi(N,x)=^{1}\overline{P}(N,x)\Pi(N)$$

$$=\begin{cases}^{1}P_n(N,x)\Pi(N)=\dfrac{4^{\pm}C_n\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\dfrac{-4\Pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right) & (x\le x_m)\\[2ex] ^{1}P_e(N,x)\Pi(N)=\dfrac{2^{\pm}C_e\Pi^2(N)}{N}\exp\left(-\dfrac{2\Pi(N)x}{N}\right) & (x_m\le x)\end{cases}$$

得(20)式

由(3)式及(20)式的正态分布情况，得

$$P(N,x)=\frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x)\,\Pi(N)=\frac{\partial}{\partial N}\frac{4^{\pm}C_n\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\frac{-4\Pi^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial N}\frac{4^{\pm}C_n li^2(N)}{\pi N}\exp\left(\frac{-4li^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=4^{\pm}C\left[\frac{2li(N)}{\pi N\ln N}-\frac{li^2(N)}{\pi N^2}+\frac{li^2(N)}{\pi N}\frac{\partial}{\partial N}\frac{-4li^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right]\exp\left(\frac{-4li^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=\frac{4^{\pm}C}{\pi}\left[\frac{2li(N)}{N\ln N}-\frac{li^2(N)}{N^2}-\frac{8li^2(N)\,x^2}{\pi N^3}\left(\frac{li(N)}{\ln N}-\frac{li^2(N)}{N}\right)\right]\exp\left(\frac{-4li^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=\frac{8^{\pm}C}{\pi}\left[\frac{li(N)}{N\ln N}-\frac{li^2(N)}{2N^2}-\frac{4li^3(N)\,x^2}{\pi N^3\ln N}+\frac{4li^4(N)\,x^2}{\pi N^4}\right]\exp\left(\frac{-4li^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right)$$

将上式中的N换成t得(16)式。同理由(3)及(20)式的指数分布情况，得

$$P(N,x)=\frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x)\,\Pi(N)=\frac{\partial}{\partial N}\frac{2^{\pm}C_e\Pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{2\Pi(N)\,x}{N}\right)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ 1=t\end{pmatrix}$$

$$=2^{\pm}C_e\frac{\partial}{\partial N}\frac{li(N)}{N}\exp\left(-\frac{2li(N)\,x}{N}\right)$$

$$=2^{\pm}C_e\left[\frac{\partial}{\partial N}\frac{li(N)}{N}-\frac{li(N)}{N}\frac{\partial}{\partial N}\frac{2li(N)}{N}\right]\exp\left(-\frac{2li(N)\,x}{N}\right)$$

$$=2^{\pm}C_e\left(\frac{1}{N\ln N}-\frac{li(N)}{N^2}\right)\left(1-\frac{2li(N)}{N}\right)\exp\left(-\frac{2li(N)\,x}{N}\right)$$

将上式中的N换成t得(17)式

由(9)及(10)两式，计算正指等值点x_m如下：

$$P_n(N,x_m)=\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x_m{}^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$= P_e\left(N, x_m\right) = \frac{^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x_m}{\sigma_e}\right)$$

对上式两边取平均得

$$\frac{2^{\pm}\overline{C}_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x_m^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{^{\pm}\overline{C}_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x_m}{\sigma_e}\right)$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x_m{}^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{^{1}1}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x_m}{\sigma_e}\right)$$

两边取对数并移项,得

$$\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} - \frac{x_m{}^2}{2\sigma_n^2} =^{\pm}\varepsilon - \ln\sigma_e - \frac{x_m}{\sigma_e}$$

整理上式，得

$$\frac{x_m{}^2}{2\sigma_n^2} - \frac{x_m}{\sigma_e} + {}^{\pm}\varepsilon = \ln\sigma_e + \ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}$$

$$= \ln\frac{2\sigma_e}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} = \ln\frac{2}{\pi} = -\ln\frac{\pi}{2}$$

所以

$$x_m = \sigma_n^2\left(\frac{1}{\sigma_e} \pm \sqrt{\frac{1}{\sigma_e^2} - \frac{1}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=^{1}\left(\frac{\sqrt{2\pi}\,N}{4\pi\left(N\right)}\right)^2\frac{2\pi\left(N\right)}{N}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right) =^{1}\frac{\pi\,N}{4\pi\left(N\right)}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

因 $2x_m$ 在中端，上式应取正号，经近似计算得(19)

可将素数率系数 $^{\pm}C_n$ 和 $^{\pm}C_e$ 统一用 $^{\pm}C$ 表达如下

$$^{\pm}C = \begin{cases} ^{\pm}C_n = P_n\left(N, x\right)\dfrac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}{2}\exp\left(\dfrac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ ^{\pm}C_e = P_e\left(N, x\right)\sigma_e\exp\left(\dfrac{x}{\sigma_e}\right) \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} {}^{\pm}C_n = \dfrac{{}^{1}\pi(N,x)}{\pi(N)}\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\dfrac{\sqrt{2\pi}\ N}{4\pi(N)}\exp\left(\dfrac{x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right) = \dfrac{{}^{1}\pi\ N\pi(N,x)}{4\pi^2(N)}\exp\left(\dfrac{4\pi^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right) \\ {}^{\pm}C_e = \dfrac{{}^{1}\pi(N,x)}{\pi(N)}\dfrac{{}^{1}N}{2\pi(N)}\exp\left(\dfrac{x}{\sigma_e(N)}\right) = \dfrac{{}^{1}N\pi(N,x)}{2\pi^2(N)}\exp\left(\dfrac{2\pi(N)\,x}{N}\right) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} {}^{\pm}C_n = \dfrac{{}^{1}\pi\,\pi(N,x)\ln^2 N}{4N}\exp\left(\dfrac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right) & (x \le x_m) \\ {}^{\pm}C_e = \dfrac{{}^{1}\pi(N,x)\ln^2 N}{2N}\exp\left(\dfrac{2x}{\ln N}\right) & (x_m \le x) \end{cases} \tag{23}$$

由此得下面数据表中计算 ${}^{\pm}C$ 值的公式

相关数据如表 7.1 、 表 7.2 、 表 7.3 、 表 7.4 、 表 7.5 、 表 7.6 所示

表 7.1 $p \le N$ 的相邻素数$(p, p+2x)$的实际值$\pi(N,x)$ 数据表

$2x$: N	$2*10^7$	10^7	$5*10^6$	$2*10^6$	10^6	$5*10^5$	$2*10^5$
2	110342	58980	32463	14871	8169	4565	2160
4	110361	58621	32307	14241	8142	4558	2134
6	188456	99987	54545	24531	13549	7474	3455
8	80717	42352	22908	10280	5569	3081	1391
10	103531	54431	29275	12967	7079	3842	1705
12	125942	65513	34888	15141	8005	4237	1821
14	68022	35394	18570	7941	4233	2281	959
16	48585	25099	13135	5550	2881	1512	637
18	85748	43851	22842	9559	4909	2512	1035
20	43738	22084	11340	4581	2401	1214	471
22	38057	19451	10008	4169	2172	1101	443
24	53997	12249	13698	5522	2682	1278	457
26	24508	27170	6153	2434	1175	539	198
28	26627	13255	6537	2559	1234	609	217
30	44176	21741	10550	4019	1914	861	319
32	13085	6364	3088	1149	550	237	68 m
34	13620	6721	3257	1220	557	267 m	90
36	21077	10194	4763	1726	767 m	331	117
38	9311	4498	2073	733 m	330	163	57
40	11156	5318	2547 m	905	424	195	66
42	15086	7180 m	3271	1105	476	200	57
44	5809 m	2779	1252	438	202	70	14
46	4882	2326	1016	350	155	67	20
48	8231	3784	1634	497	196	67	18
50	4475	2048	894	267	106	44	11
52	3134	1449	579	194	77	29	11
54	5246	2403	1048	344	140	62	18
56	2408	1072	482	158	53	15	4
58	2223	1052	467	162	54	21	7

注：表中数据右下方带“m”的数字，就是正指分界点x_m（下同）

表 7.2　$p \le N$ 的相邻素数$(p, p+2x)$的素率系数$^{\pm}C$值 数据表

$2x : N$	$2*10^7$	10^7	$5*10^6$	$2*10^6$	10^6	$5*10^5$	$2*10^5$
2	1.050	1.055	1.056	1.061	1.049	1.048	1.060
4	1.063	1.066	1.071	1.074	1.071	1.075	1.080
6	1.874	1.870	1.851	1.853	1.841	1.841	1.840
8	0.832	0.824	0.818	0.815	0.805	0.807	0.797
10	1.112	1.114	1.105	1.096	1.098	1.089	1.071
12	1.445	1.426	1.409	1.383	1.353	1.323	1.281
14	0.836	0.829	0.813	0.795	0.792	0.799	0.771
16	0.648	0.640	0.631	0.618	0.607	0.604	0.598
18	1.251	1.230	1.219	1.199	1.181	1.165	1.157
20	0.704	0.689	0.681	0.657	0.671	0.665	0.640
22	0.685	0.683	0.684	0.694	0.715	0.726	0.738
24	1.095	1.086	1.079	1.081	1.058	1.031	0.977
26	0.565	0.563	0.566	0.568	0.564	0.564	0.542
28	0.706	0.710	0.710	0.723	0.732	0.776	0.793
30	1.396	1.370	1.372	1.394	1.425	1.415	1.571
32	0.478	0.477	0.486	0.496	0.522	0.512	0.461 m
34	0.590	0.607	0.629	0.665	0.685	0.770 m	0.856
36	1.099	1.121	1.143	1.204	1.242 m	0.242	1.299
38	0.590	0.609	0.625	0.664 m	0.714	0.885	0.138
40	0.857	0.897	0.978 m	1.080	1.246	1.492	1.969
42	1.437	1.525 m	1.618	1.761	1.930	2.194	2.594
44	0.706 m	0.751	0.808	0.946	1.148	1.120	0.992
46	0.754	0.810	0.866	1.038	0.246	1.593	2.252
48	1.640	1.717	1.863	2.054	2.292	2.407	3.288
50	1.139	1.224	1.381	1.560	1.821	2.491	3.328
52	1.058	1.154	1.226	1.625	1.973	2.508	5.625
54	2.309	2.577	3.079	4.188	5.438	8.544	------
56	1.452	1.566	1.990	2.837	3.169	3.352	6.219
58	1.752	2.118	2.744	4.319	5.050	7.743	------

表 7.3　$p \le N$ 的相邻素数$(p, p+2x)$的分布 表

$2x : N$	10^5	$5*10^4$	$2*10^4$	10^4	$5*10^3$	$2*10^3$	10^3
2	1224	705	342	205	126	61	35
4	1215	692	343	202	120	63	40
6	1940	1098	525	299	162	79	44
8	773	407	186	101	55	26	15
10	916	489	211	119	66	29	16
12	964	534	214	105	50	19	7
14	484	244	107	54	28	10	7
16	339	175	69	33	16	2	1 m
18	514	261	84	40	18	6 m	1
20	238	106	40	15	5 m	2	1
22	223	103	38	16 m	9	2	
24	206	83	34 m	15	5	1	

26	88	35 m	10	3	2	0	
28	98 m	39	17	5	2	0	
30	146	66	22	11	2	0	
32	32	12	2	1	0	0	
34	33	16	7	2	1	1	
36	54	20	5	1			
38	19	5	0				
40	28	8	1				
42	19	5	1				
44	5	3	1				
46	4	0	0				
48	3	1	0				
50	5	2	0				
52	7	5	1				
54	4	3					
56	1	0					
58	4	1					

表 7.4　$p \le N$ 的相邻素数 $(p, p+2x)$ 的素率系数 $^{\pm}C$　数据表

$2x$: N	10^5	$5*10^4$	$2*10^4$	10^4	$5*10^3$	$2*10^3$	10^3
2	1.057	1.065	1.068	1.087	1.132	1.0751	1.010
4	1.087	1.088	1.124	1.134	1.154	1.212	1.286
6	1.840	1.847	1.866	1.849	1.746	1.759	1.692
8	0.796	0.770	0.742	0.715	0.695	0.711	0.742
10	1.048	1.019	0.974	1.001	1.024	1.037	1.094
12	1.255	1.290	1.181	1.092	0.997	0.931	0.711
14	0.734	0.702	0.730	0.721	0.751	0.717	1.134
16	0.612	0.616	0.601	0.588	0.604	0.223	---- m
18	1.330	1.153	0.965	0.988	1.001	1.093 m	0.512
20	0.656	0.604	0.626	0.534	0.429 m	0.636	1.012
22	0.786	0.779	0.838	0.853 m	1.246	1.175	
24	0.954	0.854	1.090 m	1.244	1.170	1.151	
26	0.544	0.504 m	0.482	0.403	0.827	0	
28	0.831 m	39	17	5	2	0	
30	146	66	22	11	2	0	
32	32	12	2	1	0	0	
34	33	16	7	2	1	1	
36	54	20	5	1			
38	19	5	0				
40	28	8	1				
42	19	5	1				
44	5	3	1				
46	4	0	0				
48	3	1	0				
50	5	2	0				
52	7	5	1				
54	4	3					
56	1	0					
58	4	1					

表 7.5　$p \le N$ 的相邻素数$(p, p+2x)$的分布 数据表

$2x$:N	$2*10^7$	10^7	$5*10^6$	$2*10^6$	10^6	$5*10^5$	$2*10^5$
60	4093	1834	763	213	96	39	10
62	1165	543	226	58	16	8	2
64	1256	559	262	74	24	7	2
66	2129	973	394	116	48	16	1
68	802	358	139	34	13	5	1
70	1171	524	218	62	22	11	3
72	995	468	178	49	13	2	1
74	539	218	76	20	12	1	0
76	417	194	75	19	6	2	0
78	784	362	164	51	13	4	1
80	369	165	69	25	3	0	0
82	265	100	40	16	5	1	0
84	560	247	93	23	6	1	0
86	158	66	21	7	4	2	1
88	166	71	24	5	1	0	
90	370	141	51	12	4	1	
92	96	37	11	4	1	0	
94	96	39	14	2	0	0	
96	116	65	21	6	2	1	
98	67	29	14	2	1	0	
100	95	36	12	5	2	1	
102	78	34	9	3	0	0	
104	46	21	8	2	0	0	
106	37	12	6	1	0	0	
108	67	26	6	0	0	0	
110	37	11	6	1	0	0	
112	24	11	3	1	1	1	
114	46	11	3	1	1	1	
116	17	7	0	1			

表 7.6　$p \le N$ 的相邻素数$(p, p+2x)$的分布数据表

$2x$:N	$2*10^7$	10^7	$5*10^6$	$2*10^6$	$2x$	10^5	$5*10^4$
118	14	4	2	1	60	1	1
120	28	3	2	1	62	1	1
122	9	4	1	0	64	1	0
124	8	8	0	0	66	0	0
126	19	2	3	2	68	0	0
128	6	1	1	0	70	0	0
130	3	5	0	0	72	1	1
132	10	1	3	2			
134	6	2	0				
136	4	2	0				
138	6	2	1				
140	6	0	0				
142	2	0	0				
144	1	1	0				
146	1	2	0				
148	2	0	1				

150	3	1	0				
152	1	1	0				
154	3		1				
156	1						

说明（1）　素率系数 $^{\pm}C$ 表中，个数较少或接近最大间距，引起太大偏差，完全失去统计意义的值未列入， 并以“------”表之

说明（2）　同一 x 值的 $^{\pm}C$ 值，随 N 变化较小，同一 N 值的 $^{\pm}C$ 值，随 x 变化较大，这个现象符合我们的认识

7.2 二生素数定理应用及推广

7.2.1 孪生素数定理

网上资料：
http://www.changhai.org/contents/science/mathematics/twin_prime.html

$$\pi_2(x) \approx 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}$$

$$C_2 = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)} \approx 0.66016111815846868957392781211000145$$

Hardy-Littlewood 猜想所给出的孪生素数分布的精确程度可以由下表看出：

表 7.7

x	孪生素数数目	Hardy-Littlewood 猜想
100,000	1224	1249
1,000,000	8,169	8,248
10,000,000	58,980	58,754
100,000,000	440,312	440,368
10,000,000,000	27,412,679	27,411,417

定理 2 孪生素数(twin prime numbers)有无穷个，小于 N 的自然数中的孪生素数个数——孪生素数定理，记为 $\pi(N,1)$ 、 $\Pi(N,1)$ ，则

$$\pi(N,1) = \frac{4^{\pm} C_n \pi^2(N)}{\pi N} \exp\left(-\frac{4\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

$$\left({}^{\pm}C_n = \frac{\pi N \pi(N,1)}{4\pi^2(N)} \exp\left(\frac{4\pi^2(N)}{\pi N^2}\right) \quad (1 = N) \right) \tag{24}$$

$$\pi(N,1) = \frac{4^{\pm} C_{n1} \pi^2(N)}{\pi N} \exp\left(-\frac{4\pi^2(N)}{3\pi N^2}\right)$$

$$\left({}^{\pm}C_{n1} = \frac{\pi N \pi(N,1)}{4\pi^2(N)} \exp\left(\frac{4\pi^2(N)}{3\pi N^2}\right) \quad (1 = N) \right) \tag{25}$$

证明　孪生素数的个数，就是段长 2x=2 的二生素数的个数$\pi(N,1)$，由“二生素数定理”一节中的(20) 得

$$\pi(N,1) = \frac{4^{\pm} C_n \Pi^2(N)}{\pi N} \exp\left(\frac{-4\Pi^2(N) x^2}{\pi N^2}\right)\Bigg|^{x=1} = \frac{4^{\pm} C_n \pi^2(N)}{\pi N} \exp\left(\frac{-4\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

整理上式得本定理中$\pi(N,1)$ 、 ${}^{\pm}C$ 的表达式(24)

$$\lim_{N\to\infty} \pi(N,1) = \lim_{N\to\infty} \frac{4^{\pm} C_n N}{\pi \ln^2 N} \exp\left(\frac{-4}{\pi \ln^2 N}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{4^{\pm} C_n N}{\pi \ln^2 N} \exp(0) = \infty$$

本定理获证。数据见表 7.8

表达式$\pi(N,1)$ 是通过近似模型获得，其相对系统及波动误差随 N 的增加而减小，表中数据显示　N 值较大后，${}^{\pm}C$ 的值在1.040附近波动

$${}^{\pm}C_n = {}^{\pm}1.040$$

故实际数据支持本定理的理论结果

表 7.8　孪生素数数据表

N	$\pi(N,1)$	${}^{\pm}C_n$	N	$\pi(N,1)$	${}^{\pm}C_n$
10	2	1.2036	10^{10}	27412679	1.0424
10^2	8	1.0886	10^{11}	224376048	1.0414
10^3	35	1.0096	10^{12}	1870585220	1.0406
10^4	205	1.0867	10^{13}	15834664872	1.0400
10^5	1224	1.0572	10^{14}	135780321665	1.0396
10^6	8169	1.0494	10^{15}	1177209242304	1.0392
10^7	58980	1.0547	10^{16}	10304195697298	1.03893

10^8	440312	1.0462	10^{17}	90948839353159	1.03869
10^9	3424506	1.0437	$4*10^{17}$	338672552419827	1.03857

$\pi(N,1)$ 数据来自网友东陆论坛 crank 提供的网站

http://www.trnicely.net/twins/twins2.html

http://www.ieeta.pt/~tos/primes.html

及 http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23627&Forum_ID=10

中东陆论坛网友 wtquan 帖出的数据，借此谢谢！

但从 (5) 、(6) 看到平均频率 $\overline{\rho}(N,x)$ 的 x 起点值是 1，平均概率 $\overline{P}(N,x)$ 的 x 起点值是零，故 $\overline{\rho}(N,1)$ 的值应该与 x 在（0，1）内 $\overline{P}(N,x)$ 的平均值对应，从理论上讲这是误差最小的选择，得

$$\overline{\rho}(N,1)=\int_0^1 \frac{{}^1\overline{P}(N,t)}{1-0}dt \qquad \overline{\rho}(N,x) \quad \int_{x-1}^{x} \frac{{}^1\overline{P}(N,t)}{x-(x-1)}dt$$

将“二生素数定理”一节中的 (20) 作对应变化得

$$\pi(N,x)=\int_{x-1}^{x}\frac{{}^1\Pi(N,t)}{x-(x-1)}dt={}^1\Pi(N)\int_{x-1}^{x}\overline{P}(N,t)\,dt$$

$$={}^1\frac{4^{\pm}C_{n1}\Pi^2(N)}{\pi N}\int_{x-1}^{x}\exp\left(\frac{-4\Pi^2(N)t^2}{\pi N^2}\right)dt={}^1\frac{4^{\pm}C_{n1}\Pi^2(N)}{\pi N}\int_{x-1}^{x}\left(1-\frac{4\Pi^2(N)t^2}{\pi N^2}\right)dt$$

$$={}^1\frac{4^{\pm}C_{n1}\Pi^2(N)}{\pi N}\left(1-\frac{4\Pi^2(N)\left[x^3-(x-1)^3\right]}{3\pi N^2}\right)$$

$$={}^1\frac{4^{\pm}C_{n1}\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\frac{4\Pi^2(N)(3x^2-3x+1)}{3\pi N^2}\right)$$

由上式得 (25) 中的 $\pi(N,1)$ 、${}^{\pm}C_{n1}$ 。数据见表 7.9。K 生素数问题都可以这样优化。此略

表 7.9　孪生素数优化数据表

i	N	$\pi(N,1)$	${}^{\pm}C_{n1}(i)$	${}^{\pm}C_{n1}(i-1)-{}^{\pm}C_{n1}(i)$
1	10	2	1.0507	
2	10^2	8	1.0323	0.0174
3	10^3	35	0.9857	0.0466

4	10^4	205	1.0728	－0.0871
5	10^5	1224	1.0489	0.0239
6	10^6	8169	1.0439	0.0050
7	10^7	58980	1.0508	－0.0069
8	10^8	440312	1.0433	0.0075
9	10^9	3424506	1.0414	0.0019
10	10^{10}	27412679	1.0406	0.0008
11	10^{11}	224376048	1.0399	0.0007
12	10^{12}	1870585220	1.0394	0.0005
13	10^{13}	15834664872	1.0390	0.0004
14	10^{14}	135780321665	1.03867	0.00033
15	10^{15}	1177209242304	1.03843	0.00024
16	10^{16}	10304195697298	1.03824	0.00019
17	10^{17}	90948839353159	1.03809	0.00015
18	$4*10^{17}$	338672552419827	1．03801	0.00008

谢谢东陆论坛网友 wtquan、crank 两位网友！！！

在下面网站中 wtquan 请 crank 帮助找到 4*10^17 内孪生素数个数的网址

Wtquan 为我提供了 4*10^17 内素数个数（10125681208311322）的数据

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23627&Forum_ID=10

http://www.ieeta.pt/~tos/primes.html

从以上孪生素数优化数据表中看出：随 N 值增大，$^{\pm}C_{n1}(i)$ 值相对误差的波动变小，$^{\pm}C_{n1}(i)$ 值均线递减的同时，递减的幅度几乎等比例缩小——指数变小，故实际数据支持 $^{\pm}C_{n1}(i)$ 的极限向一常数趋近这一理论结论

7. 2.2 相邻素数最小最大间距

注意 “边界”一章中频率的定义域是自然数，这里的边界 $2^{\downarrow}d(N)$、$2^{\uparrow}d(N)$ 等的定义域是偶数，故 $^{\downarrow}d(N)$、$^{\uparrow}d(N)$、$^{\downarrow}D(N)$、$^{\uparrow}D(N)$ 等量，就是“边界”定义的量

相邻素数就是二生素数，其最小最大间距，就是二生素数的边界：下边界及上边界

定理 3 小于 N 的相邻素数，最小最大实际间距表为 $2^{\downarrow}d(N)$、$2^{\uparrow}d(N)$，对应的理论边界，在前面近似模型下获得的结果中，经一般近似计算表为 $2^{\downarrow}D(N)_2$、$2^{\uparrow}D(N)_1$，经较

好近似计算表为 $2^{\uparrow}D(N)_2$，则

$$2^{\downarrow}D(N) = {}^{1}0\,, \qquad 2^{\downarrow}d(N) = 2 \tag{26}$$

$$2^{\uparrow}D(N)_1 = 2\sigma_e \ln \Pi(N) = {}^{1}(\ln N)\ln\frac{N}{\ln N} \qquad (1 = N) \tag{27}$$

$$2^{\uparrow}D(N)_2 ={}^{1} (\ln N)\ln\frac{4N}{\ln^2 N} - \frac{1}{2} \qquad (1 = N) \tag{28}$$

$$2^{\uparrow}d(N) ={}^{1} 2^{\uparrow}D(N)_1 ={}^{1} 2^{\uparrow}D(N)_2 \tag{29}$$

证明　方法 1

用 $(1,N)$ 内平均概率分布函数 $\overline{P}(N,x)$，近似代替 N 点的概率分布函数 $P(N,x)$，近似计算的上界表为 $2^{\uparrow}D(N)_1$

由前面讲的“二生素数的正指性”，它的平均值下界 $^{\downarrow}D(N)$ 的临界类型，是单边正态分布；它的平均值上界 $^{\uparrow}D(N)$ 的临界类型，是指数分布，引用“边界”一章中“单边正态分布函数的边界”及“指数分布函数的边界”中的定理 ，及

$$^{\downarrow}X(N,C) = \frac{{}^{1}\sqrt{2\pi}\ \sigma_n}{2\Pi(N)} = \frac{{}^{1}\pi N}{2\Pi^2(N)} ={}^{1} 0 \qquad (1 = N)$$

$$^{\uparrow}X(N) = \sigma_e \ln \Pi(N)$$

因相邻素数间距是 $2x$，其最大最小间距应是此边界的两倍

$$2^{\downarrow}D(N) = 2^{\downarrow}X(N,C) = 2\frac{{}^{1}\pi N}{2\Pi^2(N)} = 2\frac{{}^{1}\pi N \ln^2 N}{2N^2} ={}^{1} 0 \qquad (1 = N)$$

$$2^{\uparrow}D(N)_1 = 2^{\uparrow}X(N) = 2\sigma_e \ln \Pi(N) ={}^{1} 2\frac{\ln N}{2}\ln\frac{N}{\ln N}$$

计算上式得本定理 $2^{\uparrow}D(N)_1$ 的结果 (27) 式，虽然 $^{\downarrow}D(N,2) ={}^{1} 0$，但 $2d(N)$ 的最小值是 2，得 (26) 式

方法 2

直接用在近似模型下获得的 N 点的概率分布函数 $P(N,x)$，严格依平均值边界定义计算的边界，表为 $2^{\uparrow}D(N)_2$

由“二生素数定理”一节中，在 N 点高端时的概率分布函数 $P(N,x)$ 为

$$P(N,x)=\left(\frac{2^{\pm}C_e}{\ln^2 N}-\frac{4^{\pm}C_e}{\ln^3 N}+\frac{4^{\pm}C_e x}{\ln^4 N}\right)\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\quad (x_m\le x)$$

及“平均值理论边界”一节对二维平均值理论上边的定义、并注意 $2^{\uparrow}D(N)_2$ 除 2 才与 ${}^{\uparrow}_{A}T(N)$ 等价——$2^{\uparrow}D(N)_2$ 的定义域是偶数，但 ${}^{\uparrow}_{A}T(N)$ 定义域是自然数

$$\Pi_H\left(N,t\ge{}^{\uparrow}T(N)\right)=\Pi_H(N)\int_{^{\uparrow}T(N)}^{\infty}P_H(N,t)\,dt=1$$

并注意将以上表达略作变化得

$$\Pi(N)\int_{^{\uparrow}D(N)_2}^{\infty}P(N,x)\,dx$$

$$=\frac{N}{\ln N}\int_{^{\uparrow}D(N)_2}^{\infty}\left(\frac{2^{\pm}C_e}{\ln^2 N}-\frac{4^{\pm}C_e}{\ln^3 N}+\frac{4^{\pm}C_e x}{\ln^4 N}\right)\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)dx$$

$$=-\int_{^{\uparrow}D(N)_2}^{\infty}\left(\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^2 N}-\frac{2^{\pm}C_e N}{\ln^3 N}+\frac{2^{\pm}C_e Nx}{\ln^4 N}\right)d\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)$$

$$=\left\{\left(\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^2 N}-\frac{2^{\pm}C_e N}{\ln^3 N}+\frac{^{\pm}C_e N 2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln^4 N}\right)\exp\left(-\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln N}\right)\right.$$

$$\left.+\int_{^{\uparrow}D(N)_2}^{\infty}\frac{2^{\pm}C_e N}{\ln^4 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)dx\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^2 N}-\frac{2^{\pm}C_e N}{\ln^3 N}+\frac{^{\pm}C_e N 2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln^4 N}\right)\exp\left(-\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln N}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\Bigg|_{x={}^{\uparrow}D(N)_2}^{x=\infty}\right\}$$

$$=\left(\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^2 N}-\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^3 N}+\frac{^{\pm}C_e N 2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln^4 N}\right)\exp\left(-\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln N}\right)=1$$

$$\exp\left(\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln N}\right)=\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^2 N}\left(1-\frac{1}{\ln N}+\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln^2 N}\right)$$

上式两边取对数得

$$\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln N}=\ln\frac{^{\pm}C_e N}{\ln^2 N}+\ln\left(1-\frac{1}{\ln N}+\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln^2 N}\right)$$

${}^{\pm}C$ 的值取 1，$2^{\uparrow}D(N)_2$ 的一级近似值取 $\ln^2 N$，代入上式右边得

$$\frac{2^{\uparrow}D(N)_2}{\ln N} =^1 \ln\frac{N}{\ln^2 N} + \ln\left(1-\frac{1}{\ln N}+\frac{\ln^2 N}{\ln^2 N}\right) =^1 \ln\frac{2N}{\ln^2 N} + \ln 2 - \frac{1}{2\ln N}$$

$$2^{\uparrow}D(N)_2 =^1 (\ln N)\ln\frac{4N}{\ln^2 N} - \frac{1}{2}$$

本定理$2^{\uparrow}D(N)_2$的表达式(27)及(28)获证

数理统计学家克拉梅尔\,$(H.Cram\acute{e}r)$，用概率论， 亦得与此等价

$${}^{\uparrow}D(N,2)_2 : \ln^2 N$$

的结果[2]P48，数据见表 7.10

表 7.10 相邻素数最大间距数据表

i	Δp_i	$N = p_{i+1}$	$N = p_{i+1}$	${}^{\uparrow}D_{10}$	${}^{1}1_1$	${}^{\uparrow}D_{20}$	${}^{1}1_2$
1	1	3	3	1．104	0．9058	2．023	0．4943
2	2	5	5	1．824	1．0963	2．790	0．7168
3	4	11	11	3．653	1．0951	4．380	0．9132
4	6	29	29	7．250	0．8275	7．330	0．8186
5	8	97	97	13．97	0．5726	9．190	0．8705
6	14	127	127	15．82	0．8848	14．40	0．9722
7	18	541	541	28．03	0．6422	25．18	0．7149
8	20	907	907	33．31	0．6004	29．69	0．6736
9	22	1151	1151	35．92	0．6125	31．92	0．6892
10	34	1361	1361	37．81	0．8992	33．05	1．0287
11	36	9587	9587	63．74	0．5648	55．64	0．6471
12	44	15727	15727	71．46	0．6158	62．43	0．7047
13	52	19661	19661	75．09	0．6925	65．64	0．7922
14	72	31469	31469	83．05	0．8669	65．52	0．9904
15	86	156007	156007	113．3	0．7590	99．72	0．8624
16	96	360749	360749	131．1	0．7322	115．7	0．8295
17	112	370373	370373	131．7	0．8504	107．4	0．9633
1	114	492227	492227	138．1	0．825	112．9	0．9344

8					5		
19	118	1349651	1．3E6	161．9	0．7288	143．6	0．8219
20	132	1357333	1．3E6	162．3	0．8133	133．9	0．9186
21	148	2010881	2．0E6	171．8	0．8615	142．6	0．9697
22	154	4652507	4．6E6	193．8	0．7946	172．6	0．8921
23	180	17051887	1．7E7	230．4	0．7812	206．2	0．8729
24	210	20831533	2．0E7	236．4	0．8883	200．0	0．9922
25	220	47326913	4．7E7	261．6	0．8410	222．6	0．9369
26	222	122164969	1．2E8	292．3	0．7595	250．2	0．8436
27	234	189695893	1．8E8	307．1	0．7620	264．2	0．8452
28	248	191913031	1．9E8	307．5	0．8065	264．0	0．8945
29	250	387096383	3．8E8	332．0	0．7530	286．2	0．8336
30	282	436273291	4．3E8	336．3	0．8385	290．1	0．9281
31	292	1453168433	1．4E9	380．7	0．7670	330．6	0．8459
32	320	2300942869	2．3E9	398．5	0．8030	346．7	0．8848
33	336	3842611109	3．8E9	418．8	0．8023	365．3	0．8829
34	354	4302407713	4．3E9	423．3	0．8363	369．4	0．9199
35	382	10726905041	1．0E10	460．9	0．8288	403．9	0．9097
36	384	20678048681	2．0E10	488．9	0．7854	429．7	0．8608
37	394	22367085353	2．2E10	492．3	0．8003	432．8	0．8769
38	456	25056082543	2．5E10	497．3	0．9170	437．3	1．0045
39	464	42652618807	4．2E10	520．8	0．8909	459．0	0．9748
40	466	127976335137	1．2E11	571．2	0．8158	505．5	0．8944
41	474	182226896713	1．8E11	587．9	0．8063	520．9	0．8785
42	486	241160624629	2．4E11	601．3	0．8082	533．4	0．8812
43	490	297501076289	2．9E11	611．5	0．8013	542．8	0．8733
44	500	303371455741	3．0E11	612．4	0．8165	562．0	0．8897
45	514	304599509051	3．0E11	612．6	0．8390	561．2	0．9143
4	516	416608696337	4．1E11	627．9	0．821	576．6	0．8950

6					8		
47	532	461690510543	4．6E11	633．0	0．8404	581．3	0．9151
48	534	614487454057	6．1E11	647．2	0．8251	594．7	0．8979
49	540	738832928467	7．3E11	656．4	0．8227	603．4	0．8949
50	582	1346294311321	1．3E12	687．0	0．8472	632．2	0．9206
51	588	1408695494197	1．4E12	689．3	0．8530	634．4	0．9268
52	602	1968188557063	1．9E12	706．7	0．8518	650．8	0．9250
53	652	2614941711251	2．6E12	721．6	0．9035	664．9	0．9806
54	674	7177162612387	7．1E12	776．0	0．8686	716．2	0．9410
55	716	13829048560417	1．3E13	812．4	0．8813	750．6	0．9539
56	766	19581334193189	1．9E13	832．0	0．9207	769．2	0．9958
57	778	42842283926129	4．2E13	877．1	0．8870	811．9	0．9582
58	804	90874329412297	9．0E13	921．5	0．8725	854．0	0．9414
59	806	171231342421327	1．7E14	959．8	0．8398	890．3	0．9053
60	906	218209405437449	2．1E14	974．6	0．9296	804．4	1．0017
61	916	1189459969826399	1．1E15	1081．8	0．8467	1006．3	0．9103
62	924	1686994940956727	1．6E15	1104．6	0．8365	1028．0	0．8988
63	1132	1693182318747503	1．6E15	1104．8	1．0246	1028．2	1．1009
64	1184	43841547845541059	4．3E16	1328．7	0．8911	1241．6	0．9536
65	1198	55350776431903243	5．5E16	1345．5	0．8904	1257．6	0．9526
66	1220	80873624627234849	8．0E16	1373．1	0．8885	1284．0	0．9498
67	1224	203986478517455989	2．0E17	1441．7	0．8490	1349．6	0．9070
68	1248	218034721194214273	2．1E17	1446．7	0．8627	1354．3	0．9215
69	1272	305405826521087869	3．0E17	1472．1	0．8641	1378．7	0．9226
70	1328	352521223451364323	3．0E17	1483．0	0．8955	1389．1	0．9557
71	1356	401429925999153707	4．0E17	1492．9	0．9083	1398．6	0．9692
72	12540	1.0281158E384	1．0E384	775846		771073	

Δp_i =12540， $N = p_{i+1} =$

1028115851618596629291338345969573325611755920349536050557212232499695006537951219758531796
1759000690328913319244717897688019822063737812568633972613787495609549193065449769397871583
3794999935477468391789508344449541406347900355427290700854945945853825193979651314099863832
55482457633841427250249367844894786016514356294279402896163593801089250404094628816322702787
16570882306451587569=1.0281158E384=1.0281158$*10^{384}$

$$\overline{\Delta p_i}\left(p_i \right) = \overline{p_{i+1} - p_i} =^{1} \ln p_i =^{1} \ln\left(1.0281158 \ *10^{384}\right) =^{1} 884$$

可见 12540 虽只有最大理论间距 775846 的 77 分之一,但比平均间距 884 大 10 多倍

表中素数间距的实际数据 ${}^{\uparrow}d\left(N,2\right)$，是在东陆论坛网友 crank 提供网址从网上获得，东陆论坛网友天山草在下面网址，编程核对修改了原数据表中笔者手工计算的错误，借此一一致谢！

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23773&Forum_ID=10

本数据表的发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23773&Forum_ID=10

谢谢郭先强先生在以下网址提供数据址：

http://www.channelwest.com/bbs/upload/prime%5Fgaps%2Etxt%5F1058%2Etxt

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?page=2&Topic_ID=23773&Forum_ID=10

http://primes.utm.edu/notes/GapsTable.html

其中 $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i = {}^{\uparrow}d\left(N,2\right)$ ， ${}^{\uparrow}D_{10} = {}^{\uparrow}D\left(N,2\right)_{10} = \left(\ln N\right) \ln \dfrac{N}{\ln N}$

$${}^{\uparrow}D_{20} = {}^{\uparrow}D\left(N,2\right)_{10}, \quad {}^{1}1_1 = \frac{{}^{\uparrow}d\left(N,2\right)}{{}^{\uparrow}D\left(N,2\right)_{10}} = \frac{{}^{\uparrow}d\left(N,2\right)}{\left(\ln N\right) \ln\left(N \div \ln N\right)}$$

$${}^{\uparrow}D\left(N,2\right)_{20} = \left(\ln N\right) \ln \frac{4N}{\ln^2 N} - \frac{1}{2} \quad ,$$

$${}^{1}1_2 = \frac{{}^{\uparrow}d\left(N,2\right)}{{}^{\uparrow}D\left(N,2\right)_{20}} = \frac{{}^{\uparrow}d\left(N,2\right)}{\left(\ln N\right) \ln\left(4N \div \ln^2 N\right) - 0.5}$$

数据说明 $0.731 \le {}^{1}1_2 \le 1.472$ ， $\overline{{}^{1}1_2} = 0.963$

${}^{1}1_2$ 的值随 N 值增加逐渐向 1 逼近，但平均值略小于 1，一方面反应了理论边界的有效合理，另一方面理想的平均值应该以 1 为中心分布，这个偏差除了有随机波动产生的误差外，还应该存在系统误差——由于近似模型产生的固定偏差

1 用连续函数摸拟离散函数，而边界附近的发生的事件是高度离散的

2 边界附近发生的事件很少，不能较好服合使用概率统计的条件——在大量发生事件的基础上进行统计

故 ${}^{1}1_2$ 的数据分布，已好于我们预期的分布

7.2.3 广义素数的正指性

素数公理指出了，素数分布的均匀性，故可将二生素数的正指性，推广到一般情况

推理 3 任何函数或条件中，狭义或广义素数的分布，均呈正指性

在分布密集处， 趋近正态分布；分布稀疏的边界处，趋近指数分布

7.3 K 生素数问题

7.3.1 K 生素数定理

定义 11 在$t \le N$的自然数中，表为$\langle 2x_{k-1}\rangle$或$\langle d_{k-1}\rangle$、段长为$2x_i$ 或d_i $(1 \le i \le k-1)$的 k－1 个相邻素段形式的 K 生素数的个数，称为 K 生素数定理，记为$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 或$\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 等， t 处出现形如$\langle 2x_{k-1}\rangle$或$\langle d_{k-1}\rangle$的 K 生素数概率记 为$P\left(t,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$或$P\left(t,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，则

$$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)={}^{1}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)={}^{1}\pi(N)\,\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$$

可将 K 生素数的分布，看作 K－1 生素数，与一个相邻素段组合，形成两个相关系数是同阶函数的概率事件分布，前面通过求解两个相邻素数的分布，获得二生素数；同理，通过求解素数与相邻的二生素数的分布，获得三生素数的分布等量，以此类推，可以获得 K 生素数分布等量

从实际数据中发现，最密三生素数$\langle p_1|2,6\rangle$有二种：$\langle 11|2,6\rangle$和$\langle 17|2,6\rangle$，因起点p_1值不同某相同范围的个数也不同，故大于二的 K 生素数问题中的相关函数，需标记起点p_1的值。二生素数不存在这个问题，不需要在相关函数中标记起点p_1的值

定理 4 在$t \le N$的自然数中，出现形如$\langle 2x_{k-1}\rangle$或$\langle d_{k-1}\rangle$的 K 生素数个数或平均概率，记为$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 、$\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 、$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 或$\overline{P}\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ ，$t \le N$的自然数中，出现段长为$2x_i$的二生素数的平均概率等记为$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 、$P_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 或$P_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$，则

$$\overline{P}\left(N,2x_i\right)=\begin{cases}P_n\left(N,2x_i\right)=\dfrac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\dfrac{-x_i^2}{2\sigma_n^2}\right)=\dfrac{{}^{1}\pi\left(N,2x_i\right)}{\pi(N)} & \left(x_i \le x_m\right)\\ P_e\left(N,2x_i\right)=\dfrac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\dfrac{x_i}{\sigma_e}\right)=\dfrac{{}^{1}\pi\left(N,2x_i\right)}{\pi(N)} & \left(x_m \le x_i\right)\end{cases} \tag{30}$$

$$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)=\overline{P}\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=\begin{cases} {}^{\pm}C(k)\prod_{i=1}^{k-1}P_n\left(N,2x_i\right)={}^{\pm}C(k)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^{k-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4\pi^2(N)x_i^2}{\pi N^2}\right) & (x_i\le x_m) \\ {}^{\pm}C(k)\prod_{i=1}^{k-1}P_e\left(N,2x_i\right)={}^{\pm}C(k)\left(\frac{2^{\pm}C_e\pi(N)}{N}\right)^{k-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2\pi(N)x_i}{N}\right) & (x_m\le x_i) \\ {}^{\pm}C(k)\prod_{i=1}^{k-1}P\left(N,2x_i\right)={}^{\pm}C(k)\prod_{i=1}^{r}P_n\left(N,2x_i\right)\prod_{i=1}^{k-r-1}P_e\left(N,2X_i\right) & \begin{pmatrix}x_i\le x_m\\ x_m\le X_i\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(k)}{\ln^{k-1}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)=\frac{{}^{\pm}C(k)}{\ln^{k-1}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\quad(x_i\le x_m)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(k)}{\ln^{k-1}N}\qquad\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2=\ln N\right)\qquad(31)$$

$$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)={}^{1}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)={}^{1}\pi(N)\,\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(k)N}{\ln^{k}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)=\frac{{}^{\pm}C(k)N}{\ln^{k}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\quad(x_i\le x_m)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(k)N}{\ln^{k}N}\qquad\left(\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2=\ln N\right)\qquad(32)$$

$$C(k)=\frac{{}^{\pm}\pi\left(N\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\ln^{k}N}{N}\quad\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\quad(x_i\le x_m)\qquad(33)$$

其中 (30) 式表达的是二生素数的量

证明　仿照(13)、(14) 得(30)，利用 $K-1$ 个相邻二生素数是关联度为常数 C 的概率事件，得(31)、仿照(20) 可证(32)、(33) 式

本定理解决了求解 K 生素数函数表达式，下面给出具体值的推理及理论与实际数据等
发帖网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23796&Forum_ID=9

7.3.2 三生素数定理

由于 K 生素数定理前面已经获得，故一般三生素数定理的表达式此略，下面给出关于最密三生素数的推理（下同）

推理 4 $t\le N$ 内自然数中出现形如 $p,p+2,p+6$ 或 ${}^{\downarrow}\langle d_2\rangle$ 的最密三生素数的平均概率

及个数记为$\overline{P}\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)$、$\pi\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)$、$\Pi\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)$，则

$$\overline{P}\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)={}^{\pm}C(3)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^2\exp\left(-\frac{20\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)\tag{34}$$

$$\pi\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)={}^{\pm}C(3)\pi(N)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^2\exp\left(-\frac{20\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)\tag{35}$$

$${}^{\pm}C(3)C_n^2=\frac{\pi\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)}{\pi(N)}\left(\frac{\pi N}{4\pi(N)}\right)^2\exp\left(\frac{20\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)\tag{36}$$

证明　由于$p,p+2,p+6$属于最密三生素数，N 足够大后，${}^{\downarrow}\langle d_2\rangle$属于一个二生素数${}^{\downarrow}\langle d_1\rangle$与一个素数相邻，几乎构成正态分布的三生素数，由$(30)$、$(31)$及$\langle 2,4\rangle=\langle 2x_1,2x_2\rangle$得

$$\overline{P}\left(N,{}^{\downarrow}\langle d_2\rangle\right)={}^{\pm}C(3)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^2\exp\left(-\sum_{i=1}^{2}\frac{4\pi^2(N)x_i^2}{\pi N^2}\right)$$
$$={}^{\pm}C(3)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^2\exp\left(-\frac{4\pi^2(N)\left(1^2+2^2\right)}{\pi N^2}\right)$$

得整理推理的(34)表达式，由(32)及(34)式得(35)、(36)式。数据见 附 2 最密三生素数$(p,p+2,p+6)$ 的 p 值数据表，及表 7.11

表 7.11　10^5内最密三生素数$(p,p+2,p+6)$的个数数据表

N	$\pi(N)$	π_{11}	C_{11}	π_{17}	C_{17}	$\pi_{11}+\pi_{17}$	$C_{11}+C_{17}$
10	4	0		0			
$10^{1.5}$	11	1	0.99	1	0.99	2	1.98
10^2	25	2	1.17	1	0.59	3	1.76
$10^{2.5}$	65	5	1. 47	3	0.74	8	2.21
10^3	168	9	1.40	5	0.78	14	2.18
$10^{3.5}$	446	14	1.10	14	1.10	28	2.20
10^4	1229	27	0.988	27	0.988	54	1.976
$10^{4.5}$	3401	59	0.996	59	0.996	118	1.992
10^5	9592	130	0.963	128	0.949	258	1.912
$10^{5.5}$	27293	287	0.9130	301	0.9576	588	1.8706

10^6	78498	679	0.9005	713	0.9456	1392	1.8461
10^8	5761455					55600	1.7933

其中 $10^{0.5} =^{\pm} 3.1622776602$，$C_{p1} = C\left(p_1\right)^{\pm} C_n^2$，$\pi_{p1} = \pi\left(N, \langle p_1 \mid d_2 \rangle\right)$

（由东陆论坛网友豆豆提供了上面 100 万内两组三生素数的实际数据，wtquan 提供了 1 亿内的三生素数的实际数据，谢谢！！

网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23386&Forum_ID=7）

本定理及数据发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23792&Forum_ID=9

理论分析两组三生素数范围较大后的个数，将围绕同一个渐近值附近分布

说明：附 2 10^5 内最密三生素数 $\left(p, p+2, p+6\right)$ 的 p 值数据表中的数据，在表的每一行中，由小到大依次从左向右排列，每行 7 个数，它的行数等于 $n+1$，故任选一 p 值，根据它的行列数可算出它的序列号：如 1487，它处于 3 行 6 列，其序列号为：$3n+6=3*7+6=27$，与它相邻的 1607，两者间距为 $1607-1487=120$

7. 3.3 四生素数定理

推理 5 $t \le N$ 内自然数中，出现形如 $p, p+2, p+6, p+8$ 或 $^{\downarrow}\langle d_3 \rangle$ 的最密四生素数的平均概率及个数为 $\overline{P}\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$、$\pi\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$、$\Pi\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$，则

$$\overline{P}\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right) = {}^{\pm}C(4)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^3 \exp\left(-\frac{24\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

$$\pi\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right) = {}^{\pm}C(4)\,\pi(N)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^3 \exp\left(-\frac{24\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

$${}^{\pm}C(4)\,C_n^3 = \frac{\pi\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)}{\pi(N)}\left(\frac{\pi N}{4\pi(N)}\right)^3 \exp\left(\frac{24\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

证明　同理，N 足够大后，$\langle d_1, d_2, d_3\rangle$ 属于一个三生素数与一个素数相邻，几乎构成正态分布的四生素数，，由 (30)、(31) 及 $\langle 2,4,2\rangle = \langle 2x_1, 2x_2, 2x_3\rangle$，得

$$\overline{P}\left(N, ^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right) =^{\pm} C(4)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^3 \exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{4\pi^2(N)\,x_i^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=^{\pm} C(4)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^3 \exp\left(-\frac{4\pi^2(N)\left(1^2+2^2+1^2\right)}{\pi N^2}\right)$$

整理得本推理的 $\overline{P}\left(N,^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$ 表达式，由 (32) 及 $\overline{P}\left(N,^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$ 表达式得 $\pi\left(N,^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$ 、$^{\pm}C(4)C_n^3$ 的表达式。实际数据见：附 3 10^7 内最密四生素数 $(p,p+2,p+6,p+8)$ 的 p 值数据表，及由它整理的表 7.12

表 7.12 10^7 内最密四生素数 $p,p+2,p+6$,p+8 定理 $\pi\left(N,^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$ 数据表

n	$\pi\left(N,^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$	$^{\pm}C(4)C_n^3$
2	1	3.4740
3	4	7.0408
4	11	6.1196
5	37	5.0254
6	165	4.6472
7	898	4.6856

谢谢东陆论坛网友豆豆编程计算出放在附 3 中的 10^7 最密四生素数 $(p,p+2,p+6,p+8)$ R 的 p 值数据表中的实际数据，本定理及数据发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23793&Forum_ID=9

说明：附 3 10^7 内最密四生素数 $(p,p+2,p+6,p+8)$ R 的 p 值数据表中的数据，在表的每一行中，由小到大依次从左向右排列，每行 7 个数，n 的值表示它处的行数，故任选一 p 值，根据它的行列数可算出它的序列号：如 201821，它处于 7 行 4 列，其序列号为：$7n+4=7*7+4=53$，与它相邻的 217361，两者间距为 $217361-201821=15540$

7.3.4 五生素数定理

推理 6 $t\le N$ 内自然数中，出现形如 $p,p+2,p+6$,p+8,p+12 或 $^{\downarrow}\langle 12_4\rangle$ 的五生素数的平均概率及个数为 $\overline{P}\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$ 、$\pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$ 、$\Pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$，则

$$\overline{P}\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)=C(5)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^4\exp\left(-\frac{40\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

$$\pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)=C(5)\,\pi(N)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^4\exp\left(-\frac{40\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

$$C(5)^{\pm}C_n^4=\frac{\pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)}{\pi(N)}\left(\frac{\pi N}{4\pi(N)}\right)^4\exp\left(\frac{40\pi^2(N)}{\pi N^2}\right)$$

证明　N 足够大后，五生素数$\langle 2,4,2,4\rangle$属于一个四生素数$\langle 2,4,2\rangle$与一个素数相邻，几乎构成正态分布的五生素数，由(30)、(31)及$\langle 2,4,2,4\rangle=\langle 2x_1,2x_2,2x_3,2x_4\rangle$得

$$\overline{P}\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)=C(5)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^4\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\frac{4\pi^2(N)\,x_i^2}{\pi N^2}\right)$$

$$=C(p)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^4\exp\left(-\frac{4\pi^2(N)\left(1^2+2^2+1^2+2^2\right)}{\pi N^2}\right)$$

整理得本推理$\overline{P}\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$的表达式，由$(32)$及四生素数定理中$\overline{P}\left(N^{\downarrow}\langle 8_3\rangle\right)$的表达式得$\pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$、$C(5)^{\pm}C_n^4$表达式。数据见表 7.12

表 7.12　10^4 内最密五生素数$(p,p+2,p+6,p+8,p+12)$定理$\pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$数据表

N	$\pi(N)$	π_5	C_5	N	$\pi(N)$	π_5	C_5
10	4	0	0	$10^{4.5}$	3401	7	6.781
$10^{1.5}$	11	1	10.84	10^5	9592	9	4.878
10^2	25	1	8.65	$10^{5.5}$	27293	17	4.969
$10^{2.5}$	65	2	11.21	10^6	78498	33	4.557
10^3	168	2	8.143	$10^{6.5}$	227646	76	5.051
$10^{3.5}$	446	3	8.332	10^7	664579	15 8	4.906
10^4	1229	3	4.935				

$\pi_5=\pi\left(N^{\downarrow}\langle 12_4\rangle\right)$，$C_5=C(5)^{\pm}C_n^4$

谢谢由东陆论坛网友**豆豆**提供上表中五生素数实际数据！（网址：http://www.channelwest.com/bbs/showprint.asp?topic_id=7945&forum_id=7）

发帖网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23795&Forum_ID=9

7.4　相邻 K 生素数问题

7.4.1 相邻二生素数的正指性

本节问题的解决方式，与二生素数问题的解决方式相似

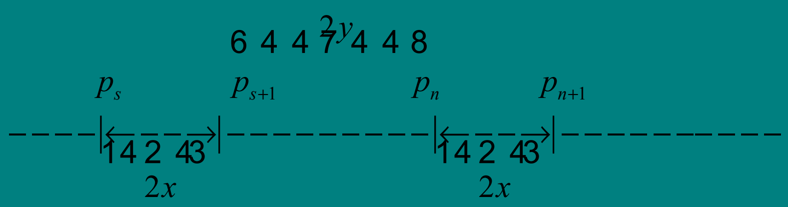
本节定理的证明过程，与二生素数的对应定理的证明相似

定理 5 两相邻二生素数的分布仍具有正指性

证明 与二生素数分布的正指性分析及证明过程类似，且概率论对若干概率分布函数的复合分布，具有传递性——具有相同的分布类型，已有定论[5]P126，证明过程略

7.4.2 相邻二生素数定理

定义 13 两个段长均为$2x$，相距为$2y$的相邻相同二生素数，称为相邻二生素数，记为$2x+2y$，示意图如下



图相邻二生素数示意图

此定义有以下意义

1 当两个段长相同的相邻二生素数，共用中间一个素数时，它们就变成了三生素数，如：$(3,5,7)$，此种三生素数$(y=0)$仅此一个，其余的此类数：$(p,p+2,p+4)$至少有一个数被三整除

2 当两个段长相同的二生素数之间，没有其它素数时，它们就变成了四生素数，如：$(11.13;17,19)$

3 当两个段长相同的二生素数之间，有一个或多个其它段长的二生素数或素数，就是一般化的相邻二生素数

定义 14 两个段长均为$2x$，相距为常数$2C$，两者间无素数时的相邻相同二生素数，

称为最相邻相同二生素数，简记为$2x+2C$；当$x=1, C=2$时，就成了最紧密的四生素数$(p,p+2,p+6,p+8)$，可称为最相邻孪生素数　　，

推理 7　$t\le N$的自然数中，段长是$2x$的二生素数的实际及理论个数，记为$\pi(N,x)$及$\Pi(N,x)$，它们将$(1,N)$这段自然数分成$\pi(N,x)$或$\Pi(N,x)$段；同理，两段长均是$2x$且相距是$2y$的的两相邻相同二生素数的素数，可表达成素数组的形式$(p_s, p_{s+1}, p_n, p_{n+1})$

$$2x = p_{s+1} - p_s = p_{n+1} - p_n \quad , \quad 2y = p_n - p_{s+1}$$

，也可简记为$2x+2y$的素数组，其个数记为$\pi(N,x,y)$或$\Pi(N,x,y)$，它们把$(1,N)$内的自然数分成了$\pi(N,x,y)$或$\Pi(N,x,y)$个素段

引理 3　$t\le N$的自然数中，段长是$2x$的素段实际及理论个数——二生素数定理，记为$\pi(N,x)$或$\Pi(N,x)$，间距是$2y$的两相邻相同二生素数的素数组，在$(1,N)$内，出现的频率、概率及它们的平均值，记为$\rho(N,x,y)$、$P(N,x,y)$、$\overline{\rho}(N,x,y)$及$\overline{P}(N,x,y)$，则

$$\overline{\rho}(N,x,y) = \frac{\pi(N,x,y)}{\pi(N)} \overset{1}{=} \overline{P}(N,x,y) = \frac{\Pi(N,x,y)}{\Pi(N)} = \frac{\Pi(N,x,y)}{\Pi(N)} \tag{43}$$

$$\begin{cases} \pi(N,x,y) = \sum_{t=0}^{N} \rho(t,x,y) = \overline{\rho}(N,x,y)\,\pi(N) \\ \Pi(N,x,y) = \int^{N} P(t,x,y)\,dt = \overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N) \end{cases} \tag{44}$$

$$M(N,x) = \int^{\infty} 2(x+y)\,\overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N)\,dy \overset{1}{=} N \tag{48}$$

$$P(N,x,y) = \frac{\partial}{\partial N}\Pi(N,x,y) = \frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N) \tag{45}$$

$$P(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(t,x,y)\,\Pi(t) \tag{46}$$

$$m(N,x) = \sum_{y=1}^{\uparrow d(N,x)} 2(x+y)\,\overline{\rho}(N,x,y)\,\pi(N) = N \tag{47}$$

证明　如前所叙：因$\pi(N)$、$\Pi(N)$个素数将$(1,N)$分割成$\pi(N)$、$\Pi(N)$个素段，

其中段长为$2x$的素段，出现的平均频率、概率、实际个数及理论个数记为$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$、$\pi(N,x)$和$\Pi(N,x)$，则

$$\overline{\rho}(N,x)=\frac{\pi(N,x)}{\pi(N)} \quad , \quad \overline{P}(N,x)=\frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)} \tag{49}$$

同理，两段长为$2x$间距是$2y$的两相邻相同二生素数出现的个数，记为$\pi(N,x,y)$及$\Pi(N,x,y)$

，因段长为$2x$的$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$个二生素段，将$(1,N)$内的自然数分割成$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$个素段，间距为$2y$的相邻相同二生素数出现的平均频率及概率，记为$\overline{\rho}(N,x,y)$、$\overline{P}(N,x,y)$。

对$\overline{\rho}(N,x,y)$、$\overline{P}(N,x,y)$而言，当参数y在$(1,\infty)$内对这两个量求和，就得到二生素数出现的平均频率及概率$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$，即

$$\overline{\rho}(N,x)=\sum_{y=1}^{\infty}\overline{\rho}(N,x,y) \quad , \quad \overline{P}(N,x)=\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x,y)\,dy$$

因$\overline{P}(N,x,y)$仍具有正指性，由上式可将$\overline{P}(N,x,y)$表达如下

$$\overline{P}(N,x,y)=\overline{P}(N,x)\,\overline{P}(N,y) \quad , \quad \int_0^{\infty}\overline{P}(N,y)\,dy=1$$

同理，当参数x在$(1,\infty)$内，对这$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$和，就得到$(1,N)$内素数出现的平均个数$\overline{\pi}(N,x)$、$\overline{\Pi}(N,x)$，即

$$\overline{\pi}(N)=\sum_{x=1}^{\infty}\overline{\rho}(N,x)=\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\overline{\rho}(N,x,y)$$

$$\overline{\Pi}(N)=\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x)\,dx=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x,y)\,dydx$$

参考(49)式及上面几个表达式，得

$$\overline{\rho}(N,x,y)=\frac{\pi(N,x,y)}{\pi(N)} \quad , \quad \overline{P}(N,x,y)=\frac{\Pi(N,x,y)}{\Pi(N)} \tag{50}$$

$$\int^{N} P(t,x,y)\,dt = \Pi(N,x,y) = \overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N)$$

$$P(N,x,y) = \frac{\partial}{\partial N}\Pi(N,x,y) = \frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N)$$

$$P(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(t,x,y)\,\Pi(t) \qquad (51)$$

$(1,N)$ 内段长为 $2x$ 的二生素数平均段长，记为 $\overline{2y}$，则

$$\overline{2y} = \frac{N}{\Pi(N,x)} = \int^{\infty} 2y\,P(N,x,y)\,dy$$

得本引理 $P(N,x,y)$ 及 $P(t,x,y)$ 等表达式 (43) 式、(44) 式、(45) 式及 (46) 式

段长是 $2x+2y$ 的素数组，乘以它在 $(1,N)$ 内出现的次数 $\pi(N,x,y)$ 或 $\Pi(N,x,y)$，就是这种素数组，在(1，N)内的累计长度，记为 $m(N,x,y)$ 及 $M(N,x,y)$，

$$\begin{cases} m(N,x,y) = (2x+2y)\,\pi(N,x,y) = 2(x+y)\,\overline{\rho}(N,x,y)\,\pi(N) \\ M(N,x,y) = (2x+2y)\,\Pi(N,x,y) = 2(x+y)\,\overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N) \end{cases} \qquad (52)$$

注意：上式右边引用了 (44) 式

$2y$ 的上边界记为 $2^{\uparrow}d(N,x)$，后面可证明

$$2^{\uparrow}d(N,x) = O\left(\ln^{3} N\right) \qquad (53)$$

对各种间距 $2y$ 的素数组 $\pi(N,x,y)$、$\Pi(N,x,y)$ 的长度 $m(N,x,y)$、$M(N,x,y)$ 求和，就得到(1，N)内的各种不同间距 $2y$ 的 $2x+2y$ 素数组的总长度，记为 $m(N,x)$ 或 $M(N,x)$，由 (52) 式，得

$$m(N,x) = \sum_{y=1}^{\uparrow d(N,x)} m(N,x,y) = \sum_{y=1}^{\uparrow d(N,x)} 2(x+y)\,\overline{\rho}(N,x,y)\,\pi(N) = N$$

$$M(N,x) = \int^{\infty} m(N,x,y)\,dy = \int^{\infty} 2(x+y)\,\overline{P}(N,x,y)\,\Pi(N)\,dy =^{1} N$$

得 (47) 式、(48) 式

定理 6　$t \le N$ 的自然数中，段长为 $2x+2y$ 的相邻二生素数 $(p,p+2x,p+2y,p+2x+2y)$ 出现的频率、概率及两者的平均值记为 $\rho(t,x,y)$、

$P(t,x,y)$、$\overline{\rho}(N,x,y)$、$\overline{P}(N,x,y)$，出现的个数记为$\pi(N,x,y)$、$\Pi(N,x,y)$， 它们正指性中，归一化的正态布函数记为$P_n(N,x,y)$，指数分布函数记为$P_e(N,x,y)$，两个变量$2x$、$2y$单独的分布函数记为$\rho(t,x)$、$P(t,y)$、$\overline{\rho}(t,x)$及$\overline{P}(t,y)$。其中，$2x$表示二生素数的段长，$2y$表示两个段长为$2x$的相邻二生素数的间距，注意“二生素数定理”中表达式(13)：(20)式，则

$$\overline{P}(N,x,y) =^{1} \overline{P}(N,x)\overline{P}(N,y) \tag{54}$$

$$\overline{P}(N,y)=P_n(N,y)=\frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)\quad (y\le y_m) \tag{55}$$

$$\overline{P}(N,y)=P_e(N,y)=\frac{{}^{\pm}B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e(N,x)}\right)\quad (y_m\le y) \tag{56}$$

$$\frac{\sigma_n(N,x)}{\sigma_e(N,x)}=\left(\frac{{}^{1}2\pi(N)}{N}\right)\div\left({}^{1}\frac{4\pi(N)}{\sqrt{2\pi}\,N}\right)=^{1}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}=\frac{{}^{\pm}1}{0.7979} \tag{59}$$

$$\sigma_n(N,x)=\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi\ln^2 N}{{}^{\pm}4^2B_nC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]\quad \begin{pmatrix} x\le x_m \\ y\le y_m \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\sigma_n(N,x)=^{\pm}\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\quad \begin{pmatrix} x_m\le x \\ y\le y_m \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\sigma_e(N,x)=\frac{{}^{\pm}\pi\ln^2 N}{8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\quad \begin{pmatrix} x\le x_m \\ y_m\le y \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\sigma_e(N,x)=\frac{{}^{\pm}\ln^2 N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\quad \begin{pmatrix} x_m\le x \\ y_m\le y \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\overline{P}(N,x,y)=\begin{cases} P_{n,n}(N,x,y)=^{\pm}2B_nP_{n,n}(N,x,y)_0 & (x\le x_m, y\le y_m) \\ P_{n,e}(N,x,y)=^{\pm}B_eP_{n,e}(N,x,y)_0 & (x\le x_m, y_m\le y) \end{cases} \tag{64}$$

$$=\begin{cases} P_n(N,x)P_n(N,y)=\dfrac{{}^{\pm}P_n(N,x)\,2B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\dfrac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right) & \begin{pmatrix} x\le x_m \\ y\le y_m \end{pmatrix} \\ P_n(N,x)P_e(N,y)=\dfrac{{}^{\pm}P_n(N,x)\,B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\dfrac{y}{\sigma_e(N,x)}\right) & \begin{pmatrix} x\le x_m \\ y_m\le y \end{pmatrix} \end{cases} \tag{65}$$

$$P_{n,n}(N,x,y)=\frac{^{\pm}4^3B_n^2C_n^2}{\pi^3\ln^3 N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}\quad(66)$$

$$=\frac{^{\pm}4^3B_n^2C_n^2}{\pi^3\ln^3 N}\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\right\}\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix},\ \frac{x}{\ln N}=1\quad(67)$$

$$P_{n,e}(N,x,y)=\frac{^{\pm}4C_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right){}^{\pm}B_e\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}\right\}\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}\quad(68)$$

$$=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix},\frac{x}{\ln N}=1\quad(69)$$

$$\overline{P}(N,x,y)=\begin{cases}P_{e,n}(N,x,y)={}^{\pm}2B_nP_{e,n}(N,x,y)_0 & (x_m\le x,y\le y_m)\\ P_{e,e}(N,x,y)={}^{\pm}B_eP_{e,e}(N,x,y)_0 & (x_m\le x,y_m\le y)\end{cases}\quad(70)$$

$$=\begin{cases}P_e(N,x)P_n(N,y)=\frac{^{\pm}P_e(N,x)2B_n}{\sqrt{2\pi}\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right) & \begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\\ P_e(N,x)P_e(N,y)=\frac{^{\pm}P_e(N,x)B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right) & \begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\end{cases}\quad(71)$$

$$P_{e,n}(N,x,y)=\frac{^{\pm}16B_n^2C_e^2}{\pi\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\quad(72)$$

$$P_{e,e}(N,x,y)=\frac{^{\pm}8B_e^2C_e^2}{\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\quad(73)$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}P_{n,n}(N,x,y)\Pi(N)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{74}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}P_{n,n}(t,x,y)\Pi(t)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{75}$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}P_{n,e}(N,x,y)\Pi(N)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{76}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}P_{n,e}(t,x,y)\Pi(t)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{77}$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}P_{e,n}(N,x,y)\Pi(N)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{78}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}P_{e,n}(t,x,y)\Pi(t)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{79}$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}P_{e,e}(N,x,y)\Pi(N)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{80}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}P_{e,e}(t,x,y)\Pi(t)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{81}$$

注意　此处的 $P(N,y)$ 函数，是描述相邻素段之间的间距 $2y$，对 $P(N,x,y)$ 函数的影响的概率，$P(N,y)$ 仍然隐含 $2x$ 变量，即变量 $2x$ 对 $P(N,y)$ 是有作用的，但为了与 $P(N,x,y)$ 区别，不便在 $P(N,y)$ 中显含变量 $2x$，同理 $2y_m$ 也隐含 $2x$ 变量

$$\pi(N,x,y)=^{1}\Pi(N,x,y)=^{1}\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$=\frac{^{\pm}4^3B_n^2C_n^2}{\pi^2\ln^4N}N\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2N}\right)^2\right\}\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1\right)\tag{82}$$

$$=\frac{^{\pm}32B_nB_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4N}N\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2N}\right)\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1\right)\tag{83}$$

$$=P_{e,n}(N,x,y)\frac{^{\pm}2C_e}{\ln^2N}N\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{84}$$

$$=P_{e,e}(N,x,y)\frac{^{\pm}2C_e}{\ln^2N}N\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{85}$$

$$y_m =^1 \frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right) \tag{86}$$

$$= \frac{\pi^3 \ln^3 N}{32^{\pm} C_n^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{8x^2}{\pi \ln^2 N}\right) \quad (x \le x_m) \tag{87}$$

$$y_m =^1 \frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right) \tag{88}$$

$$= \frac{\pi \ln^3 N}{16^{\pm} C_e^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{4x}{\ln N}\right) \quad (x_m \le x) \tag{89}$$

其中　$\sigma_n(N,x)$ 及 $\sigma_e(N,x)$ 是正态及指数分布的均方差；$2y_m$ 是正态及指数分布的分界点；${}^{\pm}B_n$ 或 ${}^{\pm}B_e$ 是同阶函数形式的标准概率分布系数，以标准的正态分布或指数分布为权，在两相邻素段间距 $2y$ 的定义域内，对 ${}^{\pm}B_n$ 或 ${}^{\pm}B_e$ 进行加权平均的值等于 1

$${}^{\pm}\overline{B}_n = {}^{\pm}\overline{B}_e = 1 \tag{90}$$

$${}^{\pm}B = \frac{{}^1\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)} \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N)}{2}\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right) \quad (y \le y_m) \tag{91}$$

$${}^{\pm}B = \frac{{}^1\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\sigma_e(N)\exp\left(\frac{x}{\sigma_e(N)}\right) \quad (y_m \le y) \tag{92}$$

证明　与“二生素数定理”一节情况相似：低端趋近正态分布，高端趋近指数分布，中端两种分布均接近.，故在中端，以正指分布的等值点 y_m 为界，低端用正态分布，高端用指数分布,分别单独用 $\overline{\rho}(N,x,y)$ 近似描述，概率分布函数 $\overline{P}(N,x,y)$

$\overline{P}(N,x)$ 与 $\overline{P}(N,x,y)$ 的异同分析：两者都具有正指性；$2x$ 、$2y$ 的正指分布等值点表为 $2x_m$ 、$2y_m$ ；　$\overline{P}(N,x)$ 是关于 x 归一化的函数

$$\int_0^{\infty} \overline{P}(N,x)\,dx = 1$$

$\overline{P}(N,x,y)$ 是关于 y 归 $\overline{P}(N,x)$ 化的函数

$$\int_0^{\infty} \overline{P}(N,x,y)\,dy = \overline{P}(N,x)$$

$\overline{P}(N,x)$ 的均方差仅与N有关，表为$\sigma_n(N)$、$\sigma_e(N)$；$\overline{P}(N,x,y)$ 的均方差与N及x有关，表为$\sigma_n(N,x)$、$\sigma_e(N,x)$

仿照(8)：(13)式及上面的分析，由(43)式可将$\overline{P}(N,x,y)$表为(64)式

$P_n(N,y)$、$P_e(N,y)$的表达式与$P_n(N,x)$、$P_e(N,x)$相似，只需在(9)式、(10)式中，将x用y代替等，即可得(55)式、(56)式

由(55)式、(56)式代入(64)式得(65)式

$$P_n(N,x,y) = {}^1\overline{P}(N,x)P_n(N,y) = 2^{\pm}B_nP_n(N,x,y)_0$$

$$= \overline{P}(N,x)\frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right) \quad (y \le y_m) \qquad (94)$$

$$P_e(N,x,y) ={}^1 \overline{P}(N,x)P_e(N,y) ={}^{\pm} B_eP_e(N,x,y)_0$$

$$= \overline{P}(N,x)\frac{{}^{\pm}B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right) \quad (y_m \le y) \qquad (95)$$

用(94)式表达的$P_n(N,x,y)$近似代替(48)式中的$\overline{P}(N,x,y)$，从而近似计算$\sigma_n(N,x)$的值得

$$M(N,x) = \int_{\pm 0}^{\infty} 2(x+y)\frac{2^{\pm}B_n\overline{P}(N,x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)\Pi(N)\,dy ={}^1 N$$

整理上式得

$$\frac{M(N,x)}{4B_n\overline{P}(N,x)\Pi(N)} = \frac{{}^1N}{4B_n\overline{P}(N,x)\Pi(N)} ={}^{\pm}\int_{\pm 0}^{\infty}\frac{x+y}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)dy$$

$$= \int_{\pm 0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)\frac{dy}{\sigma_n(N,x)} + \int_{\pm 0}^{\infty}\frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)\frac{dy^2}{\sigma_n^2(N,x)}$$

$$= \int_{\pm 0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du + \int\frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}}\exp(-v)\,dv$$

$$= x - \frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v) \Big|_{v=^{\pm} 0}^{v=\infty} = x + \frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}}$$

则

$$\sigma_n(N,x) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^{1}N}{4B_n \overline{P}(N,x)\Pi(N)} - x\right) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^{1}\ln N}{4^{\pm}B_n \overline{P}(N,x)} - x\right) \qquad (96)$$

由 (13) 式代入上面 (96) 式得

$$\sigma_n(N,x) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^{1}\ln N}{4^{\pm}B_n \overline{P}(N,x)} - x\right) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^{1}\ln N}{4^{\pm}B_n P_n(N,x)} - x\right)$$

$$= \sqrt{2\pi}\left\{\frac{\ln N}{4^{\pm}B_n}\left[\frac{4^{\pm}C_n}{\pi \ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)\right]^{-1} - x\right\}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi \ln^2 N}{{}^{\pm}4^2 B_n C_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi \ln^2 N}\right) - x\right] \qquad \begin{pmatrix} x \le x_m \\ y \le y_m \end{pmatrix}$$

得 (60) 式

由 (14) 式代入 (96) 式得

$$\sigma_n(N,x) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^{1}\ln N}{4^{\pm}B_n \overline{P}(N,x)} - x\right) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^{1}\ln N}{4^{\pm}B_n P_e(N,x)} - x\right) \qquad \begin{pmatrix} x_m \le x \\ y \le y_m \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left\{\frac{\ln N}{4^{\pm}B_n}\left[\frac{2^{\pm}C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\right]^{-1} - x\right\} \qquad \begin{pmatrix} x_m \le x \\ y \le y_m \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{{}^{\pm}8B_n C_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right) - x\right] \qquad \begin{pmatrix} x_m \le x \\ y \le y_m \end{pmatrix}$$

得 (61) 式

同理，用 (95) 式中的 $P_e(N,x,y)$ 近似代替 (48) 式中的 $\overline{P}(N,x,y)$，从而近似计算 $\sigma_e(N,x)$ 的值，得

$$M(N,x) = \int_{{}^{\pm}0}^{\infty} 2(x+y)\frac{{}^{\pm}B_e \overline{P}(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Pi(N)\,dy =^{1} N \qquad (y_m \le y)$$

整理上式，得

$$\frac{M(N,x)}{2B_e\overline{P}(N,x)\Pi(N)}=\frac{^{\pm}N}{2B_e\overline{P}(N,x)\Pi(N)}=^{\pm}\int_{^{\pm}0}^{\infty}\frac{x+y}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)dy \qquad (y_m\le y)$$

$$=-^{\pm}\int_{^{\pm}0}^{\infty}(x+y)\,d\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)=-^{\pm}(x+y)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Bigg|_{y=^{\pm}0}^{y=\infty}+\int_{^{\pm}0}^{\infty}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)dy$$

$$=-^{\pm}(x+y)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Bigg|_{y=^{\pm}0}^{y=\infty}+\int_{^{\pm}0}^{\infty}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)dy$$

$$=^{\pm}x-\sigma_e(N,x)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Bigg|_{y=^{\pm}0}^{y=\infty}=^{\pm}x+\sigma_e(N,x)$$

将上式移项，得

$$\sigma_e(N,x)=\frac{^{\pm}N}{2B_e\overline{P}(N,x)\Pi(N)}-x=\frac{^{\pm}\ln N}{2B_e\overline{P}(N,x)}-x \qquad (y_m\le y) \qquad (97)$$

由(13)式代入上式(97)式，得

$$\sigma_e(N,x)=\frac{\ln N}{^{\pm}2B_eP_n(N,x)}-x=\frac{\ln N}{^{\pm}2B_e}\left[\frac{4^{\pm}C_n}{\pi\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2N}\right)\right]^{-1}-x \qquad \begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\pi\ln^2N}{^{\pm}8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2N}\right)-x \qquad \begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

得(62)式

由(14)式代入(97)式得

$$\sigma_e(N,x)=\frac{\ln N}{2^{\pm}B_eP_e(N,x)}-x=\frac{\ln N}{2^{\pm}B_e}\left[\frac{2^{\pm}C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\right]^{-1}-x$$

$$=\frac{^{\pm}\ln^2N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x \qquad \begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

得(63)式

既然归一化的$P_n(N,y)$及$P_e(N,y)$

$$\int_0^{\infty}P_n(N,y)\,dy=\int_0^{\infty}2^{\pm}B_nP_n(N,y)_0\,dy=1$$

$$\int_0^\infty P_e(N,y)\,dy = \int_0^\infty {}^{\pm}B_e P_e(N,y)_0\,dy = 1$$

分别接近于标准的正态分布 $P_n(N,y)_0$ 的两倍， 或指数 分布 $P_e(N,y)_0$，将 ${}^{\pm}B_n$ 以标准正态分布函数 $P_n(N,x)_0$ 为权，在间距 y 的定义域内进行加权平均值表为 ${}^{\pm}\overline{B}_n$，或将 ${}^{\pm}B_e$ 以指数分布函数 $P_e(N,y)_0$ 为权，在间距 y 的定义域内进行加权平均值表为 ${}^{\pm}\overline{B}_e$，则

$$^{\pm}\overline{B}_n = \frac{\int_{\pm 0}^{\infty} 2^{\pm}B_n P_n(N,y)_0\,dy}{\int_{\pm 0}^{\infty} P_n(N,y)_0\,dy} = \int_0^\infty P_n(N,y)\,dy = 1$$

$$^{\pm}\overline{B}_e = \frac{\int_{\pm 0}^{\infty} {}^{\pm}B_e P_e(N,y)_0\,dy}{\int_{\pm 0}^{\infty} P_e(N,y)_0\,dy} = \int_0^\infty P_e(N,y)\,dy = 1$$

即：${}^{\pm}\overline{B}_n$ 或 ${}^{\pm}\overline{B}_e$ 均等于 1 得 (90) 式

由(13)式、(55)式及(60)式，得

$$\overline{P}(N,x,y) = P_{n,n}(N,x,y) = P_n(N,x)\,P_n(N,y) \qquad (x \le x_m\ ,\ y \le y_m)$$

$$= \frac{4^{\pm}C_n}{\pi \ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)\frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)$$

$$= \frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi \ln^2 N}{{}^{\pm}4^2B_nC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi \ln^2 N}{{}^{\pm}4^2B_nC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]\right)^{-2}\right\}$$

$$= \frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\frac{\pi \ln^2 N}{{}^{\pm}4^2B_nC_n}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\frac{\pi \ln^2 N}{{}^{\pm}4^2B_nC_n}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]\right)^{-2}\right\} \qquad \begin{pmatrix} x \le x_m \\ y \le y_m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{\left[\frac{-y^2}{2}\left(\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-2}\right]\right\}\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\exp\left\{\left[\frac{-y^2}{2}\left(\frac{{}^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\right]\right\}\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{matrix},\ \frac{x}{\ln N}=1\right)$$

整理上式得(66)式、(67)式

同理，由(13)式、(56)式及(62)式，得

$$\overline{P}(N,x,y)=P_{n,e}(N,x,y)=P_n(N,x)P_e(N,y)\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix}\right)$$

$$=P_n(N,x)\frac{{}^{\pm}B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix}\right)$$

$$=^1\frac{4^{\pm}C_n}{\pi\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right){}^{\pm}B_e\left[\frac{{}^{\pm}\pi\ln^2 N}{8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\left[\frac{{}^{\pm}\pi\ln^2 N}{8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]^{-1}\right\}\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}4C_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right){}^{\pm}B_e\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}\right\}\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)\quad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1\right)$$

整理上式得(68)式、(69)式

同理，由(14)式、(61)式及(94)式，得

$$\overline{P}(N,x,y)=P_{e,n}(N,x,y)=^1\frac{2^{\pm}B_nP_e(N,x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)\quad\left(\begin{matrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{matrix}\right)$$

$$=^1\frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{\pm}C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\right)^{-2}\right\}$$

$$=\frac{{}^{\pm}4B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right)^{-2}\right\}$$

$$=\frac{{}^{\pm}4B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln N}\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}$$

$$=\frac{{}^{\pm}16B_n^2C_e^2}{\pi\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

得(72)式

同理，由(14)式、(63)式、(64)式及(95)式，得

$$\overline{P}(N,x,y)=P_{e,e}(N,x,y)=P_e(N,x)P_e(N,y)$$

$$=\frac{{}^{\pm}B_eP_e(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2^{\pm}B_eC_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left[\frac{{}^{\pm}\ln^2 N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]^{-1}\exp\left\{-y\left[\frac{{}^{\pm}\ln^2 N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]^{-1}\right\}$$

$$=\frac{{}^{\pm}2B_eC_e}{\ln N}\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

整理上式得(73)式

$P(N,x,y)$ 的值因 $2x$ 、 $2y$ 的分布区间，可表达成 (74) 到 (81) 式

由 (45) 式、(46) 式、(65) 式，得

$$P(N,x,y)=\frac{\partial\overline{P}(N,x,y)\Pi(N,y)}{\partial N}=\frac{\partial P_{n,n}(N,x,y)\Pi(N)P_n(N,x)}{\partial N}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial P_{n,n}(t,x,y)\Pi(t)P_n(t,x)}{\partial t}$$

得 (74) 式、(75) 式

由 (44) 式、(64) 式及 (67) 式，得

$$\pi(N,x,y)=^{1}\Pi(N,x,y)=^{1}\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$=^{1}P_{n,n}(N,x,y)\Pi(N)\qquad(x\le x_m\ ,\ y\le y_m)$$

$$=\frac{^{\pm}4^3B_n^2C_n^2}{\pi^2\ln^3N}\ \exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2N}\right)^2\right\}\frac{N}{\ln N}\qquad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{matrix}\ ,\ \frac{x}{\ln N}=1\right)$$

$$=\frac{^{\pm}4^3B_n^2C_n^2}{\pi^2\ln^4N}\ N\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2N}\right)^2\right\}\qquad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{matrix}\ ,\ \frac{x}{\ln N}=1\right)$$

得 (82) 式

由 (44) 式、(64) 式及 (69) 式，得

$$\pi(N,x,y)=^{1}\Pi(N,x,y)=^{1}\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$=^{1}P_{n,e}(N,x,y)\Pi(N)\qquad(x\le x_m\ ,\ y_m\le y)$$

$$=\frac{^{\pm}32B_nB_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3N}\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2N}\right)\frac{N}{\ln N}\qquad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1\right)$$

$$=\frac{^{\pm}32B_nB_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4N}N\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2N}\right)\qquad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1\right)$$

得 (83) 式

由 (44) 式、(70) 式及 (71) 式，得

$$\pi(N,x,y)=^{1}\Pi(N,x,y)=^{1}\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)\overline{P}(N,x)$$

$$=^{1} P_{e,n}\left(N,x,y\right)\Pi\left(N\right) \qquad \left(x_{m}\leq x,\ y\leq y_{m}\right)$$

整理上式，得(84)式，其中$P_{e,n}\left(N,x,y\right)$由$(72)$式给出

同理，由(44)式、(70)式及(71)式，得

$$\pi\left(N,x,y\right)=^{1}\Pi\left(N,x,y\right)=^{1}\overline{P}\left(N,x,y\right)\Pi\left(N\right)\overline{P}\left(N,x\right)$$

$$=^{1} P_{e,e}\left(N,x,y\right)\Pi\left(N\right) \qquad \left(x_{m}\leq x,\ y_{m}\leq y\right)$$

整理上式得(85)式，其中$P_{e,e}\left(N,x,y\right)$由$(73)$式给出

间距$2y$等于$2y_{m}$的点，是$\overline{P}\left(N,y_{m}\right)$的正态分布$P_{n}\left(N,y_{m}\right)$与指数分布$P_{e}\left(N,y_{m}\right)$的等值点，由$(55)$式、$(56)$式，得

$$P_{n}\left(N,y_{m}\right)=\frac{2^{\pm}B_{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}\left(N,x\right)}\exp\left(\frac{-y_{m}^{2}}{2\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)}\right)$$

$$=P_{e}\left(N,y_{m}\right)=\frac{^{\pm}B_{e}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\exp\left(-\frac{y_{m}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\right)$$

对上式两边取平均得

$$\frac{2^{\pm}\overline{B}_{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}\left(N,x\right)}\exp\left(\frac{-y_{m}^{2}}{2\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)}\right)=\frac{^{\pm}\overline{B}_{e}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\exp\left(-\frac{y_{m}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}\left(N,x\right)}\exp\left(\frac{-y_{m}^{2}}{2\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)}\right)=\frac{^{1}1}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\exp\left(-\frac{y_{m}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\right)$$

两边取对数并移项得

$$\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}\left(N,x\right)}-\frac{y_{m}^{2}}{2\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)}=^{\pm}\varepsilon-\ln\sigma_{e}\left(N,x\right)-\frac{y_{m}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}$$

整理上式得

$$\frac{y_{m}^{2}}{2\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)}-\frac{y_{m}}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}+^{\pm}\varepsilon=\ln\sigma_{e}\left(N,x\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}\left(N,x\right)}$$

$$=\ln\frac{2\sigma_{e}\left(N,x\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}\left(N,x\right)}=\ln\frac{2}{\pi}=-\ln\frac{\pi}{2}$$

$$y_{m}=\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)\left(\frac{1}{\sigma_{e}\left(N,x\right)}\pm\sqrt{\frac{1}{\sigma_{e}^{2}\left(N,x\right)}-\frac{1}{\sigma_{n}^{2}\left(N,x\right)}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2(N,x)}{\sigma_n^2(N,x)}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=^1\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)=^1\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

因$2y_m$在中端，上式应取正号，将$\sigma_n(N,x)$、$\sigma_e(N,x)$分别代入上式，得

$$y_m=^1\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)=^1\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\sigma_n(N,x)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\pi^2\ln^3N}{16^{\pm}C_n^2}\exp\left(\frac{8x^2}{\pi\ln^2N}\right)\quad(x\le x_m)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\ln^3N}{4^{\pm}C_e^2}\exp\left(\frac{4x}{\ln N}\right)\quad(x_m\le x)$$

$$=\frac{\pi^3\ln^3N}{64^{\pm}C_n^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{8x^2}{\pi\ln^2N}\right)\quad(x\le x_m)$$

$$=\frac{\pi\ln^3N}{16^{\pm}C_e^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{4x}{\ln N}\right)\quad(x_m\le x)$$

得定理中y_m的表达式(86)：(89)式

可将标准概率分布系数${}^{\pm}B_n$ 和${}^{\pm}B_e$统一用${}^{\pm}B$表达如下

$$^{\pm}B=\begin{cases}{}^{\pm}B_n=\dfrac{{}^1\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\dfrac{\sqrt{2\pi}\sigma_n(N)}{2}\exp\left(\dfrac{x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right) & (y\le y_m)\\ {}^{\pm}B_e=\dfrac{{}^1\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\sigma_e(N)\exp\left(\dfrac{x}{\sigma_e(N)}\right) & (y_m\le y)\end{cases}$$

得定理中${}^{\pm}B$的表达式(91)式、(92)式

7.4.3 相邻孪生素数定理

四个素数$(p,p+2,p+6,p+8)$构成的相邻孪生素数——最相邻孪生素数，是相邻二生素数的一个特例。同时，它又是最密四生素数

定理 7 不大于 N 的最相邻孪生素数的个数——最相邻孪生素数定理，记为$\pi(N,1,2)_2$或

$\pi(N)_4$，则

$$\pi(N,1,2)_2=\pi(N)_4=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}N={}^{\pm}B_e^2C_n^2\frac{1.2935N}{\ln^4 N}\quad(1=N)\qquad(98)$$

$$B_e^2C_n^2=\frac{^{\pm}\pi(N,1,2)_2\ln^4 N}{1.2935N}\quad(1=N)\qquad(99)$$

其中 $B_e^2C_n^2$ 是几个系数构成的同阶函数

证明　此相邻孪生素数是段长为 $2x=2$，间距为 $2y=4$ 的相邻相同二生素数，由 (83) 式计算 $\pi(N,1,2)_2$ 的值，得

$$\pi(N,1,2)_2=\pi(N,x,y)\Big|_{x=1}^{y=2}=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}N\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}N={}^{\pm}B_e^2C_n^2\frac{1.2935N}{\ln^4 N}\qquad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1=N\right)$$

整理得 (98) 式。由上式移项得

$$B_e^2C_n^2=\frac{^{\pm}\pi(N,1,2)_2\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}{32N}=\frac{^{\pm}\pi(N,1,2)_2\ln^4 N}{1.2935N}\quad(1=N)$$

得 (99) 式

$\pi(N,1,2)_2$ 是形如 $(p,p+2,p+6,p+8)$ 的最密四生素数在 N 内的个数,是从附 3 数据表中整理获得：如 $(11,13,17,19)$，$(101,103,107,109)$、$(191,193,197,199)$、$(191,193,197,199)$ 等

谢谢东陆论坛的网友豆豆在下面网址编程计算出最相邻孪生素数组的数据，并整理成下面数据表（http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=7944&Forum_ID=7）

表 7.14 10^n 内最相邻孪生素数组定理 $\pi(10^n,1,2)$ 数据表

n	$\pi(10^n,1,2)$	$B_e^2C_n^2$
2	1	3.474
3	4	7.0408
4	11	6.1196
5	37	5.0254

6	165	4.6472
7	898	4.6856

上表数据中显示 $B_e^2C_n^2$ 的值随 N 值增大，波动逐渐减小，支持理论结果：$B_e^2C_n^2$ 是一个有渐近值——极限的量

注：表 7.14 10^n 内最相邻孪生素数组的个数 $\pi\left(10^n,1,2\right)$ 数据表，就是表 7.12 10^7 内最密四生素数 $p,p+2,p+6,p+8$ 定理 $\pi\left(N,^{\downarrow}\langle d_3\rangle\right)$ 数据表，即用两种思路获得了同一个定理

7. 4.4 相邻二生素数最小最大间距

计算原理与“二生素数的最小最大间距”一节相似， 这里 $\overline{P}(N,y)$ 的作用，与 $\overline{P}(N,x)$ 相似、$\sigma(N,x)$ 的作用与 $\sigma(N)$ 相似等。

注意 “边界”一章中频率的定义域是自然数，这里的边界 $2^{\downarrow}d(N,x)$、$2^{\uparrow}d(N,x)$、$2^{\downarrow}D(N,x)$、$2^{\uparrow}D(N,x)$ 等的定义域是偶数

定理 8 在自然数 $(1,N)$ 内，两段长均为 $2x$、相距为 $2y$ 的相邻二生素数，出现频率、概率及个数，记为 $\rho(N,x,y)$、$P(N,x,y)$、$\pi(N,x,y)$、$\Pi(N,x,y)$。间距 $2y$ 的最小最大值，即平均值定义域边界，表为 $^{\downarrow}2d(N,x)$、$2^{\uparrow}d(N,x)$、$2^{\downarrow}D(N,x)$、$2^{\uparrow}D(N,x)$，则

$$\begin{cases}2^{\downarrow}D(N,x)=^{\pm}0\\ ^{\downarrow}2d(N,x)=4\end{cases}\qquad(100)$$

$$2^{\uparrow}D(N,x)=^{!}\left(\ln\frac{^{\pm}32B_eC_n^2N}{\sqrt{2\pi^5}\ln^3 N}-\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\frac{\pi\ln^2 N}{4B_eC_n}=^{!}\frac{\pi\ln^3 N}{4B_eC_n}\quad\begin{pmatrix}x=\ln N\\1=N\end{pmatrix}\quad(101)$$

$$B_eC_n=^{!}\left(\ln\frac{^{\pm}32B_eC_n^2N}{\sqrt{2\pi^5}\ln^3 N}-\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\frac{\pi\ln^2 N}{8^{\uparrow}D(N,x)}=^{!}\frac{\pi\ln^3 N}{8^{\uparrow}d(N,x)}\quad\begin{pmatrix}x=\ln N\\1=N\end{pmatrix}\quad(102)$$

证明　下面只计算在$(x=\ln N,1=N)$条件下，由(69)式决定的上界。由(68)式决定的上界计算过程与此类似，此略

将(20)、(69)式代入第二章边界中(48)式表达的三维平均值理论上界，此处表为

$2^{\uparrow}D(N,x)$，得

$$\Pi\left(H\left(N,2x,2y\geq 2^{\uparrow}D(N,x)\right)\right)=\Pi(N,x)\int_{^{\uparrow}D(N,x)}^{\infty}P_{n,e}(N,x,y)\,dy$$

$$=\frac{4^{\pm}C_n\pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(-\frac{4\pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right)\int_{^{\uparrow}D(N,x)}^{\infty}\frac{32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)dy$$

$$=\frac{^{\pm}4^4B_e^2C_n^3N}{\pi^3\sqrt{2\pi}\ln^5 N}\exp\left(-\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left(-\frac{\pi\ln^2 N}{8B_eC_n}\right)\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)\Bigg|_{y=^{\uparrow}D(N,x)}^{y=\infty}$$

$$=\frac{^{\pm}4^4B_e^2C_n^3N}{\pi^3\sqrt{2\pi}\ln^5 N}\exp\left(-\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left(-\frac{\pi\ln^2 N}{8B_eC_n}\right)\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)\Bigg|_{y=^{\uparrow}D(N,x)}^{y=\infty}$$

$$=\frac{^{\pm}32B_eC_n^2N}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\exp\left(-^{\uparrow}D(N,x)\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)=1$$

对上式两边取对数，得：

$$\ln\frac{^{\pm}32B_eC_n^2N}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}-\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}-^{\uparrow}D(N,x)\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}=0$$

整理上式得(101)、(102)式

因素数分布的正指性，下界$2^{\downarrow}d(N,x)$、$2^{\downarrow}D(N,x)$是单边正态分布的下界，则边界一章单边正态分布的下边得(100)式

推理 8　相邻孪生素数的最小最大间距记为$2^{\uparrow}d(N,1)$，则

$$2^{\uparrow}D(N,1) =^{1} \frac{\pi\ln^3 N}{4B_eC_n} \quad \begin{pmatrix} x=\ln N \\ 1=N \end{pmatrix} \tag{103}$$

$$B_eC_n =^{1} \frac{\pi\ln^3 N}{8^{\uparrow}D(N,1)} =^{1} \frac{\pi\ln^3 N}{8^{\uparrow}d(N,1)} \quad \begin{pmatrix} x=\ln N \\ 1=N \end{pmatrix} \tag{104}$$

证明　在(101)、(102)式中，让$x=1$得（103)、(104)式

7.4.5 相邻 K 生素数定理

定义 13 当两个 K 生素数对应素数间距完全相同，称它们是相同 K 生素数

定义 14 当两个相同 K 生素数中间，没有与它们相同的 K 生素数时，称它们是相邻 K 生素数，若 K 生素数表为$\langle 2x_{k-1}\rangle$，间距为$2y$的相邻 K 生素数，可记为$\langle 2x_{k-1},2y\rangle$

显然，相邻 K 生素数中间，可以有素数或不同的 K 生素数

定义 15　在$t\le N$的自然数中，出现表为$\langle 2x_{k-1},2y\rangle$的相邻 K 生素数的概率及个数，分别记为$P(t,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$ 、$P(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$ 、　　、$\Pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$ ，　将$\pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$ 、$\Pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$ 称为相邻 K 生素数定理，则

$$\pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle) = {}^{1}\Pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle) = {}^{1}\pi(N,\langle 2x_{k-1}\rangle)\overline{P}(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$$

分析相邻 K 生素数有两种方法，定义如下

此法用于分析最小最大间距等问题

定义 16 对相邻 K 生素数这$2K$个素数构成的$2K-1$个相邻素数，借助前面相邻素数的结果，进行逐个汇总，将它称为逐个分析法;

此法用于分析 K 生素数率及个数等问题

定理 9 单个分析法：不大于N的自然数中，表为$\langle 2x_{k-1},2y\rangle$的相邻 K 生素数出现的概率及个数，分别记为$P(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$、$\pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$、$\Pi(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle)$，则

$$\overline{P}(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle) = {}^{\pm}C\overline{P}(N,\langle 2x_{k-1}\rangle)P_n(N,y) \qquad (y\le y_m)$$

$$= \frac{2^{\pm}CC_n\overline{P}(N,\langle 2x_{k-1}\rangle)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,\langle x_{k-1}\rangle)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,\langle x_{k-1}\rangle)}\right) \qquad (y\le y_m)$$

$$= \frac{8^{\pm}CC_n\overline{P}^3(N,\langle 2x_{k-1}\rangle)}{\pi}\exp\left(-\frac{{}^{\pm}16\overline{P}^4(N,\langle 2x_{k-1}\rangle)}{\pi}y^2\right) \quad (y\le y_m) \tag{105}$$

$$\frac{1}{\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}=\frac{{}^{\pm}C8\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\sqrt{2\pi}} \tag{106}$$

$$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P_e\left(N,y\right) \qquad \left(y_m\le y\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}CC_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right) \qquad \left(y_m\le y\right)$$

$$=2^{\pm}CC_e\overline{P}^3\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\exp\left(-{}^{\pm}2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)y\right) \qquad \left(y_m\le y\right) \tag{107}$$

$$\frac{1}{\sigma_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}={}^{\pm}C2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right) \tag{108}$$

$$y_m=\frac{{}^{\pm}\pi}{16\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right) \tag{109}$$

$$\frac{\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\sigma_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}=\frac{{}^{\pm}\sqrt{2\pi}}{4}={}^{\pm}0.62666 \tag{110}$$

$$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{!}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{!}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)$$

$$=\frac{8^{\pm}CC_n\pi\left(N\right)\overline{P}^4\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\pi}\exp\left(-\frac{16\overline{P}^4\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\pi}y^2\right) \qquad \left(y\le y_m\right) \tag{111}$$

$$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{!}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{!}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)$$

$$=2^{\pm}CC_e\pi\left(N\right)\overline{P}^4\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\exp\left(-2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)y\right) \qquad \left(y_m\le y\right) \tag{112}$$

$${}^{\pm}CC_n=\frac{\pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)}{8\pi\left(N\right)\overline{P}^4\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\exp\left(-16\overline{P}^4\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)y^2\div\pi\right)\div\pi}$$

$$\left(y\le y_m\right) \tag{113}$$

$$CC_e=\frac{\pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)}{\pi\left(N\right)\overline{P}^4\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\exp\left(-{}^{\pm}2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)y\right)} \qquad \left(y_m\le y\right) \tag{114}$$

其中 $\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 的值由(31)决定

证明　不大于 N 的自然数中，因表为 $\langle 2x_{k-1}\rangle$ 的 K 生素数共有 $\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 个，它们将这 N 个自然数砍成了 $\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 段、这 $\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 段自然数，按其长短的分布呈正指性，与相邻素数的分布行为完全相似：简单重叙如下

不大于 N 的自然数中，因表为 p 的素数共有 $\pi(N)$ 个，它们将这 N 个自然数砍成了 $\pi(N)$ 段、这 $\pi(N)$ 段自然数，按其长短的分布呈正指性，

因相邻 K 生素数出现的概率，随其两 K 生素数之间的间距 $2y$ 的分布，仍是正指分布，故在不大于 N 的自然数中，可将它们随间距 $2y$ 变化的平均概率分布函数，记为 $\overline{P}(2y)$，仿照(10)：(12)式得

$$\overline{P}(N,y)=\begin{cases}{}^{1}P_{n}(N,y) & (y<y_m)\\ {}^{1}P_{e}(N,y) & (y_m\le y)\end{cases}$$

$$P_n(N,2y)=2^{\pm}C_nP_n(N,y)_0=\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)$$

$$(y<y_m)\qquad(115)$$

$$P_e(N,2y)={}^{\pm}C_eP_e(N,2y)_0=\frac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)$$

$$(y_m\le y)\qquad(116)$$

设相邻 K 生素数的间距 $2y$ 与 K 生素数 $\langle 2x_{k-1}\rangle$ 两者的概率分布函数 $P(N,y)$ 及 $P\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 之间的相关系数为 ${}^{\pm}C$，则

$$P\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{\pm}CP\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P(N,y)\qquad(117)$$

两边平均，得

$$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\overline{P}\left(N,y\right)$$

$$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)=\begin{cases}{}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P_n\left(N,y\right) & \left(y\le y_m\right)\\ {}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P_e\left(N,y\right) & \left(y_m\le y\right)\end{cases}\qquad(118)$$

由(115)、(118)式，得(105)式

由(116)、(118)式，得(107)式

分$y<y_m$及$y_m<y$两种情况，分别计算$\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$、$\sigma_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$：

1）、仿照(13)式中$\sigma_n\left(N\right)$的计算过程，利用不大于 N 的自然数中，K 生素数的实际平均间距$\dfrac{N}{\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}$，及理论平均间距$\int_0^\infty 2y\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)dy$几乎相等的原理，借助$(115)$、$(118)$式计算$\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$如下

$$\frac{N}{\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}={}^{1}\int_0^\infty 2y\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)dy$$

$$={}^{1}\int_0^\infty 2y\,{}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\overline{P}\left(N,y\right)dy$$

$$={}^{\pm}C\int_0^\infty 2y\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P_n\left(N,y\right)dy\qquad\left(y<y_m\right)$$

$$={}^{\pm}C2\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\int_0^\infty y\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\right)dy$$

$$=-2^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\frac{4\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$*^{\pm}\overline{C}_n\int_0^\infty\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\right)d\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\right)$$

用证明(18)式相同的方法，可证明（此略）(18)式的结果：$\overline{C}_n=1$在这里同样成立，依定义简化上式左边，并整理上式右边，得

$$\frac{1}{\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)} = 2^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\frac{4\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{\sqrt{2\pi}}$$

整理上式，得定理中$\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$的表达式

2）、同理，仿照(14)式中$\sigma_e\left(N\right)$及上面$\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$的计算过程，借助$(116)$、$(118)$式得

$$\frac{N}{\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)} = {}^{1}\int_0^\infty 2y\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)dy$$

$$= {}^{1}\int_0^\infty 2y\,{}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\overline{P}\left(N,y\right)dy$$

$$= {}^{1}\int_0^\infty 2y\,{}^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P_e\left(N,y\right)dy \qquad \left(y_m < y\right)$$

$$=2^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\int_0^\infty y\frac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)dy$$

$$=2^{\pm}C\overline{C}_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\int_0^\infty\left(-y\right)d\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)$$

$$=2^{\pm}C\overline{C}_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\left[\left(-y\right)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\infty}\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)d\left(-y\right)\right]$$

$$=2^{\pm}C\overline{C}_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\int_0^\infty\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)dy$$

$$=2^{\pm}C\overline{C}_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\int_0^\infty\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)dy$$

$$=2^{\pm}C\overline{C}_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\left[-\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)\right]\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\infty}$$

$$=2^{\pm}C\overline{C}_e\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)$$

同理，可证明（此略）(18) 式的结果：$\overline{C}_e=1$ 在这里也成立，依定义简化上式左边，并整理上式右边，得

$$\frac{1}{\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}=2^{\pm}C\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)$$

整理上式，得定理中 $\sigma_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$ 的表达式

由 (106) 、(108) 式，得 (110) 式

通过 (115) 、(116) 两式，由

$$P_n\left(N,2y\right)\Big|^{y=y_m}=P_e\left(N,2y\right)\Big|^{y=y_m}\qquad(119)$$

计算正指点 y_m，得

$$\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(\frac{-y_m^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)=\frac{^{\pm}C_e}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\exp\left(-\frac{y_m}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\right)$$

下面的推导过程，与计算正指点 x_m 相同，故在 (19) 式 x_m 的表达式：

$$x_m=\frac{\sigma_n^2}{\sigma_e}\left(1+\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

中，用 $\sigma_n\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)$ 取代 σ_n，用 $\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)$ 取代 σ_e，得

$$y_m=\frac{\sigma_n^2\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}{\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\left(1+\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}{\sigma_n^2\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\qquad(120)$$

通过(106)、(108)式，将$\sigma_n\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)$及$\sigma_e\left(N,\langle x_{k-1}\rangle\right)$的值代入上式，得

$$y_m=\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{{}^{\pm}8\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\right)^2 {}^{\pm}2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$$

$$*\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{{}^{\pm}8\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{{}^{\pm}2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\sqrt{2\pi}}\right)^2\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}\pi}{16\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

得定理中正指点y_m的表达式。

下面计算相邻K生素数定理$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)$，由定义得

$$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{1}\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)={}^{1}\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)$$

$$={}^{1}\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)P\left(N,\langle 2x_{k-1},2y\rangle\right)\qquad\left(y\le y_m\right)$$

将(32)、(105)式代入上式，并整理得(111)及(113)式；

将(32)、(107)式代入上式，并整理得(112)及(114)式。

7.4.6 K生素数最小最大间距

前面及本节内容有一个规律：

1）借助分析二生素数的结果，可得相邻素数的最小最大间距；

2）借助分析相邻二生素数的结果，可得二生素数的最小最大间距；

同理：

（3）借助分析相邻K生素数的结果，可得K生素数的最小最大间距；

3者的共同点是：前者由两个相邻的后者构成，故构成前者两个相邻“后者”的间距上下界，就是后者分布的最小最大间距

定理10 不大于N的自然数中，表为$\langle 2x_{k-1},2y\rangle$的相邻K生素数中的间距$2y$出现的最小、最大间距，分别记为${}^{\downarrow}2y$、${}^{\uparrow}2y$，则

$$ {}^{\downarrow}2y \stackrel{1}{=} \frac{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{C\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)} \stackrel{\pm}{=} C\left(\langle 2x_{k-1}\rangle\right) \qquad (121) $$

$$ {}^{\uparrow}2y = \frac{{}^{\pm}\ln\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)} $$

$$ = \frac{\ln^{2k-2}N}{2^{\pm}C^2(k)}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{8x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left[\ln\frac{{}^{\pm}C(k)N}{\ln^k N}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right] \quad \left(x_i \le x_m\right) $$

$$ \stackrel{\pm}{=} B(k)\ln^{2k-1}N \qquad \left(x_i \le x_m,\ \sum_{i=1}^{k-1}x_i^2 = \ln N\right) \qquad (122) $$

$$ {}^{\pm}C(k) = \frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y\ln N}} \qquad \left(x_i \le x_m\right) \qquad (123) $$

证明　在$\langle 2x_{k-1},2y\rangle$分布的正指性中，$2y$的下界${}^{\downarrow}2y$ 及上界${}^{\uparrow}2y$，分别呈现正态分布的下界，及指数分布的上界：

参考第二章边界中正态分布下界的(67)式

$$ {}^{\downarrow}X_n(N,C) \stackrel{1}{=} \frac{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n(N)}{C\Pi(N)} $$

用$\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$代替上式的$\sigma_n(N)$，用$\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$代替上式的$\Pi(N)$，并引用$(106)$、$(31)$、$(32)$式，得

$$ {}^{\downarrow}2y \stackrel{1}{=} \frac{\sqrt{2\pi}\ \sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{C\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)} \stackrel{1}{=} \frac{\sqrt{2\pi}}{C\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right){}^{\pm}2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)} \stackrel{\pm}{=} 0 \qquad (1=\ln N) $$

得定理中${}^{\downarrow}2y$的表达式

同理，参考第二章边界中指数分布上界的(74)式

$$ {}^{\uparrow}X_e(N) = \sigma_e\left(\pi(N)\right)\ln\Pi(N) $$

用$\sigma_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$代替上式的$\sigma_n(N)$，用$\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$代替上式的$\Pi(N)$，并引用$(108)$、$(31)$、$(32)$式，得

$$^{\uparrow}2y=\sigma_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\ln\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)=\frac{^{\pm}\ln\Pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}{2\overline{P}^2\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)}$$

$$=\ln\left[\frac{^{\pm}C(k)N}{\ln^k N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\right]\div\left\{2\left[\frac{^{\pm}C(k)}{\ln^{k-1}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\right]^2\right\}\quad\left(x_i\le x_m\right)$$

$$=\frac{^{\pm}\ln^{2k-2}N}{2C^2(k)}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{8x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left(\ln\frac{C(k)N}{\ln^k N}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\quad\left(x_i\le x_m\right)$$

得定理中$^{\uparrow}2y$表达式，由上式得

$$^{\pm}C^2(k)=\frac{\ln^{2k-2}N}{2^{\uparrow}2y}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{8x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left(\ln\frac{^{\pm}C(k)N}{\ln^k N}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\quad\left(x_i\le x_m\right)$$

两边开方得

$$^{\pm}C(k)=\frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left(\ln\frac{^{\pm}C(k)N}{\ln^k N}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x_i\le x_m\right)\qquad(124)$$

对上式进行叠代近似计算，得

$$^{\pm}C(k)_1=\frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$^{\pm}C(k)=\frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left(\ln\frac{^{\pm}C(k)_1 N}{\ln^k N}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$*\left(\ln\left[\frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\frac{N}{\ln^k N}\right]-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\ln^{k-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}\ln N}$$

得定理中$^{\pm}C(k)$的表达式

数据见下表

表 7.15 十万内最密二生素数$(p,p+2)$最大间距$^{\uparrow}2y$数据表

i	N	$^{\uparrow}2y$	$\frac{\ln N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}$	$\exp\left(\frac{4}{\pi\ln^2 N}\right)$	$\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y\ln N}}$	$^{\pm}C(2)$
1	5	2	0．8047	1．6348	0．6636	0．8730
2	11	6	0．6922	1．2479	0．5300	0．4578
3	29	12	0．6873	1．1188	0．7511	0．5776
4	59	18	0．6796	1．0796	0．9382	0．6883
5	101	30	0．5958	1．0616	1．0191	0．6446
6	419	72	0．5032	1．0354	1．3247	0．6903
7	809	150	0．3866	1．0288	1．7589	0．6996
8	2549	168	0．4279	1．0209	1．6956	0．7407
9	8819	192	0．4636	1．0155	1．9755	0．9301
10	12821	210	0．4615	1．0143	2．0474	0．9584
11	13679	282	0．4010	1．0141	2．0254	0．8237
12	18911	372	0．3610	1．0132	2．0626	0．7544
13	24917	498	0．3208	1．0125	2．0872	0．6779
14	62927	630	0．3113	1．0105	2．2534	0．7088

（10 万内孪生素数最大间距表，从来自云南大理的朵朵先生!!!在东陆论坛的以下网址给出的数据整理而成，此谢 ！
http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=30836&Forum_ID=7）

在(123)式中，代入$k=2$及$(p,p+2)=(p,p+2x_1)$，得

$$^{\pm}C(2)=\frac{\ln N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\frac{4}{\pi\ln^2 N}\right)\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y\ln N}}\qquad(x_i\le x_m)$$

说明 从上表可见：$^{\pm}C(2)$的值在$(0.4578,0.9584)$之间呈类似 S 形的波浪振动，随N值的增加，振幅变小

表 7.16 十万内最密三生素数$(p,p+2,p+6)$最大间距$^{\uparrow}2y$数据表

i	N	$^{\uparrow}2y$	$\frac{\ln^2 N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}$	$\exp\left(\frac{40}{\pi\ln^2 N}\right)$	$\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y\ln N}}$	$^{\pm}C(3)$
1	17	6	2．317	4．885	0．861	9．745
2	41	24	1．991	2．514	0．683	3．416
3	101	60	1．944	1．818	0．832	2．940
4	191	84	2．128	1．587	1．032	3．430
5	461	114	2．4914	1．4028	1．2669	4．4275
6	641	180	2．2015	1．3564	1．2860	3．8402
7	1091	210	2．3874	1．2972	1．4246	4．4120
8	1871	264	2．4704	1．2514	1．5428	4．7697

9	2657	390	2．2261	1．2273	1．5781	4．3115
10	3251	564	1．9471	1．2149	1．5756	3．7270
11	6827	630	2．1958	1．1774	1．7553	4．5381
12	7877	1050	1．7565	1．1714	2．1471	4．1622
13	47711	1530	2．0980	1．1160	2．0935	4．9017
14	5890 7	2016	1．8999	1．1113	2．1063	4．4471
15	86111	2844	1．7121	1．1036	2．1471	4．0568

由东陆论坛网友豆豆提供了 100 万内两组三生素数的实际数据，wtquan 提供了 1 亿内的三生素数的实际数据，整理而成，此谢！！

网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23386&Forum_ID=7

本定理及数据发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23792&Forum_ID=9

其中：由 $(p,p+2,p+6)=(p,p+2x_1,p+2x_2)$ 及 $k=3$ 代入 (123) 式中：

$$^{\pm}C(3)=\frac{\ln^{3-1}N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\sum_{i=1}^{3-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}\right)\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}\ln N}\qquad (x_i\le x_m)$$

$$=\frac{\ln^2 N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}\exp\left(\frac{40}{\pi\ln^2 N}\right)\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}\ln N}\qquad (x_i\le x_m)$$

说明　从上表可见：$^{\pm}C(3)$ 的振幅同样随 N 的增加而减少，并向 4.5 附近靠近

表 7.17 千万内最密 4 生素数 $(p,p+2,p+6,p+8)$ 最大间距 $^{\uparrow}2y$ 数据表

i	N	$^{\uparrow}2y$	$\frac{\ln^3 N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}}$	$\exp\left(\frac{104}{\pi\ln^2 N}\right)$	$\ln^{\frac{1}{2}}\frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}\ln N}$	$^{\pm}C(4)$
1	101	90	7.326776	4.731477	0.699503	24.24929
2	821	630	8.513024	2.085776	1.112391	19.75190
3	1481	660	10.70942	1.861027	1.311427	26.13742
4	3251	1170	10.93224	1.659007	1.455178	26.39207
5	3461	1210	11.00159	1.646205	1.468202	26.59042
6	5651	2190	9.744106	1.558157	1.513549	22.97998
7	9431	3780	8.815615	1.484759	1.572418	20.58148
8	31721	6420	9.826345	1.360910	1.815534	24.27872
9	43781	8940	9.128054	1.336229	1.849922	22.56382
10	97841	9030	11.29083	1.284929	2.036860	29.55059
11	135461	1326 0	10.13148	1.267553	2.062552	26.48768
12	217361	1554 0	10.52792	1.245072	2.146724	28.13930
13	326141	2415 0	9.309648	1.228223	2.182035	24.95009
14	768191	2879 0	10.37181	1.197524	2.337693	29.03530
15	144058 1	2961 0	11.71779	1.178951	2.456456	33.93521
16	150862 1	3999 0	10.18175	1.177695	2.434506	29.19215

17	3047411	5658 0	9.89272	1.160112	2.531434	29.05243
18	379807 1	5691 0	10.30692	1.155151	2.571151	30.61225
19	514648 1	7161 0	9.752277	1.148682	2.603824	29.16873
20	561046 1	8346 0	9.185671	1.146920	2.604627	27.44034

谢谢东陆论坛网友豆豆编程计算出放在附 3 中的 10^7 最密四生素数

$(p, p+2, p+6, p+8)$ R 的 p 值数据表中的实际数据，由此整理出上表，数据发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23793&Forum_ID=9

其中 由 $(p, p+2, p+6, p+8) = (p, p+2x_1, p+2x_2, p+2x_3)$ 及 $k=4$ 代入 (123)

式中：

$$^{\pm}C(4) = \frac{\ln^{4-1} N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}} \exp\left(\sum_{i=1}^{4-1} \frac{4x_i^2}{\pi \ln^2 N}\right) \ln^{\frac{1}{2}} \frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y \ln N}} \qquad (x_i \le x_m)$$

$$= \frac{\ln^3 N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y}} \exp\left(\frac{104}{\pi \ln^2 N}\right) \ln^{\frac{1}{2}} \frac{N}{\sqrt{2^{\uparrow}2y \ln N}} \qquad (x_i \le x_m)$$

此数据表中的数据，还处于缓慢变化中,总体在 30 附近变化

总结 上面三个表数据的统计范围，相对相邻素数间距而言虽不够大，但系数 $^{\pm}C(k)$ 还是比较明显地逐渐围绕各自的某一值波动，支持理论要求它的极限是常数

7.5 $\prod_{i=1}^{u-1} K_{u-i}$ 生素数问题

7.5.1 u 生 k 生素数定理

定义 16 当 u 个相距为 $\langle 2y_{u-1}\rangle$ 的相邻 K 生素数 $\langle 2x_{k-1}\rangle$，构成由 uk 个素数组成的这种素数组合时，将这种素数组合称为 u 生 K 生素数。可用 $\langle 2x_{k-1}, 2y_{u-1}\rangle$ 表示

引理 4 出现形如 $\langle 2y_{u-1}\rangle$ 或 $\langle d_{u-1}\rangle$ 的 K 生素数个数或平均概率，记为 $\pi(N,\langle 2y_{u-1}\rangle)$ 、$\pi(N,\langle d_{u-1}\rangle)$ 、$\overline{P}(N,\langle 2y_{u-1}\rangle)$ 或 $\overline{P}(N,\langle d_{u-1}\rangle)$ ，$t \le N$ 的自然数中，出现段长为 $2y_j$ 的二生素数的平均概率，记为 $\overline{P}(N,\langle 2y_{u-1}\rangle)$ 、 $P_n(N,\langle 2y_{u-1}\rangle)$ 或

$P_e\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)$，则：

$$\overline{P}\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)=\overline{P}\left(N,\langle d_{u-1}\rangle\right)$$

$$=\begin{cases} {}^{\pm}C(u)\prod_{i=1}^{u-1}P_n\left(N,2y_j\right)={}^{\pm}C(u)\left(\dfrac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^{u-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\dfrac{4\pi^2(N)y_j^2}{\pi N^2}\right)\left(y_j\le y_m\right) \\ {}^{\pm}C(u)\prod_{i=1}^{u-1}P_e\left(N,2y_j\right)={}^{\pm}C(k)\left(\dfrac{2^{\pm}C_e\pi(N)}{N}\right)^{u-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\dfrac{2\pi(N)y_j}{N}\right)\left(y_m\le y_j\right) \\ {}^{\pm}C(u)\prod_{i=1}^{u-1}P\left(N,2y_j\right)={}^{\pm}C(u)\prod_{i=1}^{r}P_n\left(N,2y_j\right)\prod_{i=1}^{k-r-1}P_e\left(N,2Y_j\right)\quad\left(\begin{matrix} y_j\le y_m \\ y_m\le Y_j\end{matrix}\right) \end{cases}$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(u)}{\ln^{u-1}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4\pi^2(N)y_j^2}{\pi N^2}\right)=\frac{{}^{\pm}C(u)}{\ln^{u-1}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2N}\right)\quad\left(y_j\le y_m\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(u)}{\ln^{u-1}N}\quad\left(\begin{matrix} y_j u=y_m \\ y_m={}^{\pm}1.297\ln N\end{matrix}\ ,\ \sigma_n={}^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,N}{4\pi(N)}\ ,\ \sigma_e={}^{1}\frac{N}{2\pi(N)}\right)\qquad(125)$$

$$\pi\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)={}^{1}\Pi\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)={}^{1}\pi(N)\,\overline{P}\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(u)N}{\ln^{u}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2N}\right)\quad\left(y_j\le y_m\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(u)N}{\ln^{u}N}\quad\left(\begin{matrix} y_j u=y_m \\ y_m={}^{\pm}1.297\ln N\end{matrix}\ ,\ \sigma_n={}^{1}\frac{\sqrt{2\pi}\,N}{4\pi(N)}\ ,\ \sigma_e={}^{1}\frac{N}{2\pi(N)}\right)\qquad(126)$$

$${}^{\pm}C(u)=\frac{{}^{\pm}\pi\left(N\langle 2y_{u-1}\rangle\right)\ln^{u}N}{N}\left(\sum_{j=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2N}\right)\qquad(127)$$

证明　在(31)：(33)式中，用u换k，x_i换y_j，就得到K生素数已证明的以上表达式(125)：(127)式

借助前面K生素数定理，并将对应量进行叠代，即可获得u生K生素数定理如下

定理11 逐个计算法：在$t\le N$的自然数中，出现形如$\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle$的$u$生K生素数个数或平均概率，分别记为$\pi\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$、$\overline{P}\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$，两相邻$\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle$的间距记为$z$，$Z$，则：

$$\overline{P}\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)={}^{\pm}C(u,k)\,\overline{P}^{u}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\overline{P}\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)$$

$$
=\begin{pmatrix} {}^{\pm}C(k)\left(\frac{4^{\pm}C_n\pi(N)}{\pi N}\right)^{k-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4\pi^2(N)x_i^2}{\pi N^2}\right) & (x_i\le x_m) \\ {}^{\pm}C(k)\left(\frac{2^{\pm}C_e\pi(N)}{N}\right)^{k-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2\pi(N)x_i}{N}\right) & (x_m\le x_i) \\ \prod_{i=1}^{r}P_n(N,2x_i)\prod_{i=1}^{k-r-1}P_e(N,2X_i) & \begin{pmatrix} x_j\le x_m \\ x_m\le X_j \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{u}
$$

$$
*\begin{pmatrix} \left(\frac{{}^{\pm}4C(u)\pi(N)}{\pi N}\right)^{u-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4\pi^2(N)y_j^2}{\pi N^2}\right) & (y_j\le y_m) \\ \left(\frac{{}^{\pm}4C(u)\pi(N)}{\pi N}\right)^{u-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{2\pi(N)y_j}{N}\right) & (y_m\le y_j) \\ {}^{\pm}C^{u-1}(u)\prod_{j=1}^{r}P_n(N,2y_j)\prod_{j=1}^{k-r-1}P_e(N,2Y_j) & \begin{pmatrix} y_j\le y_m \\ y_m\le Y_j \end{pmatrix} \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{{}^{\pm}C(u,k)}{\ln^{uk-1}N}\exp\left(\frac{-4}{\pi\ln^2N}\left(u\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2+\sum_{i=1}^{u-1}y_j^2\right)\right)\qquad\begin{pmatrix} x_i\le x_m \\ y_j\le y_m \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{{}^{\pm}C(u,k)}{\ln^{uk-1}N}\qquad\left(u\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2=x_m^2\ ,\ \sum_{i=1}^{u-1}y_j^2=y_m^2\right)\tag{128}
$$

$$
\pi(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle)={}^{1}\pi(N)\overline{P}(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle)=\frac{{}^{1}N}{\ln N}\overline{P}(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle)
$$

$$
=\frac{{}^{\pm}C(u,k)N}{\ln^{uk}N}\exp\left(\frac{-4}{\pi\ln^2N}\left(u\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2+\sum_{i=1}^{u-1}y_j^2\right)\right)\qquad\begin{pmatrix} x_i\le x_m \\ y_j\le y_m \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{{}^{\pm}C(u,k)N}{\ln^{uk}N}\qquad\begin{pmatrix} x_i\le x_m \\ y_j\le y_m \end{pmatrix}\tag{129}
$$

$$
{}^{\pm}C(u,k)=\frac{\pi(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle)\ln^{uk}N}{N}\exp\left(\frac{4}{\pi\ln^2N}\left(\sum_{i=1}^{u-1}y_j^2+u\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2\right)\right)
$$

$$
(x_i\le x_m\ ,y_j\le y_m)\tag{130}
$$

其中 ${}^{\pm}C(u,k)$ 是全部 uk 个素数形成的相关系数

证明　可在 K 生素数定理的 (31)：(33) 式中，将 K 换成 uk 并整理获得本定理，过程此略，下面再用归纳法简单证明这一结果。

在$t \le N$的自然数中，出现形如$\langle 2x_{k-1} \rangle$或$\langle d_{k-1} \rangle$的 K 生素数个数或平均概率，记为$\pi\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$、$\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$或$\overline{P}\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$t \le N$的自然数中，出现段长为$2x_i$的二生素数的平均概率等记为$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$、$P_n\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$或$P_e\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$；K 生素数定理已将这几个量用$(31)$：$(33)$式表达；

对u生 K 生素数分析如下：

（1） 当$u=1$时，$\overline{P}\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$就是 K 生素数的$\overline{P}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)$，故$(128)$：$(130)$式成立；

（2） 当$u=2$时，就是$2k$个素数组成的 K 生素数问题，其中，素数间距是$2x_i$ $(\le i \le k-1)$的均有两个，素数间距是$2y_1$的只有一个。由 K 生素数定理的(31)：(31)式，及本节引理中的(125)：(127)式，显然能使(128)：(130)式成立；

（3） 同理可证u取任意值时，(128)：(130)式均成立

7. 5.2 五组孪生素数问题

用$\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle$表示 5 个相距$\langle 2y_1,2y_2,2y_3,2y_4\rangle$的孪生素数${}^{\downarrow}\langle 2\rangle$，即五组孪生素数，它相当于 10 生素数，数据见下表

表 7.18 五组孪生素数$\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle$实际值

909287	2596619	9617981	12628337	18873497	21579629	25739771
909289	2596621	9617983	12628339	18873499	21579631	25739773
909299	2596637	9617987	12628349	18873509	21579641	25739807
909301	2596639	9617989	12628351	18873511	21579643	25739809
909317	2596661	9617999	12628379	18873521	21579659	25739837
909319	2596663	9618001	12628381	18873523	21579661	25739839
909329	2596667	9618017	12628391	18873527	21579671	25739867
909331	2596669	9618019	12628393	18873529	21579673	25739869
909341	2596679	9618041	12628409	18873539	21579707	25739891
909343	2596681	9618043	12628411	18873541	21579709	25739893
34140077	39433367	62832101	67369397	84733211	90122507	102243017
34140079	39433369	62832103	67369399	84733213	90122509	102243019
34140089	39433391	62832137	67369409	84733247	90122519	102243059
34140091	39433393	62832139	67369411	84733249	90122521	102243061
					90122561	102243077
					90122563	102243079

34140101 34140103 34140179 34140181 34140191 34140193	39433397 39433399 39433409 39433411 39433439 39433441	62832149 62832151 62832167 62832169 62832191 62832193	67369427 67369429 67369439 67369441 67369481 67369483	84733277 84733279 84733301 84733303 84733391 84733393	90122621 90122623 90122651 90122653	102243107 102243109 102243131 102243133

（wtquan 给出了 1.2 亿内只有上面数据表中 14 个五组孪生素数，且不存在更多组的孪生素数，借此致谢！网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23386&Forum_ID=7）

将上面数据表中相邻孪生素数间距$\langle 2y_4\rangle$，整理成下面数据表

表 7.19 相邻孪生素数间距$\langle 2y_4\rangle$数据表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	16	4	10	10	10	34	10	22	34	10	34	10	40
16	22	10	28	10	16	28	10	4	10	16	28	40	16
10	4	16	10	4	10	28	74	10	16	10	22	58	28
10	10	22	16	10	34	22	10	28	22	40	88	28	22

从上面 14 组五生孪生素数表可以看出，没有一组对应相邻孪生素数间距是相同的，相当于出现了 14 组各自不同的 10 生素数，由(129)式，得

$$\pi\left(N\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle\right)=\frac{{}^{\pm}C(5,2)\,N}{\ln^{10}N}\exp\left(\frac{-4}{\pi\ln^2 N}\left(\sum_{i=1}^{u-1}y_j^2+u\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2\right)\right)\qquad(131)$$

由此，在$N=1.2*10^8$处，对 10 生素数的个数$\pi\left(N\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle\right)$估值得

$$\pi\left(N\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle\right)=\pi\left(1.2*10^8\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(10)\,N}{\ln^{10}N}\exp\left(-\frac{1}{\pi\ln^2 N}\left(\sum_{i=1}^{k-1}4y_i^2+ux_1^2\right)\right)^{N=1.2*10^8}$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(10)\,1.2*10^8}{\ln^{10}1.2*10^8}\exp\left(-\frac{10^2+16^2+10^2+10^2+4}{3.14\left(\ln 1.2*10^8\right)^2}\right)$$

$$={}^{\pm}C(10)\,2.417*10^{-5}\exp(-0.5152)={}^{\pm}C(10)\,2.417*10^{-5}=1$$

由于上式中的${}^{\pm}C(10)$一般是一个不大于 100 的数，故$\pi\left(1.2*10^8\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle\right)$的值远小于 1

注意：只选了数据表中第一组数据（10，16，10，10），作计算，获得一个供估值的参考数据。理论计算表明：出现 10 生素数的任意一素数间距组合$\langle 2x_{10-1}\rangle$的个数

$\pi\left(1.2*10^8\langle 2y_4,{}^{\downarrow}2\rangle\right)$，远小于 1，理解成不容易出现。但是这种在组合在 $1.2*10^8$ 的数量较多，故出现了 14 组各不相同的 10 生素数。大于五的 K 生孪生素数,理论计算结果将更小，更不容易出现，实际情况确实没出现，支持理论预测

7. 5 .3 相邻 u 生 K 生素数定理

定理 12 在 $t\le N$ 的自然数中，出现两组相距为 $2z$ 、$2Z$ 形如 $\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle$ 的相邻 u 生 K 生素数个数或平均概率，分别记为 $\pi\left(N,\langle 2z,2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$ 、$\overline{P}\left(N,\langle 2z,2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$，随 $2z$ 变化的正态分布或指数分布的均方差，记为 $\sigma_n\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$ 、$\sigma_e\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$，则：

$$\overline{P}\left(N,\langle 2z,2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)={}^{\pm}C(2,u,k)\,\overline{P}^{2u}\left(N,\langle 2x_{k-1}\rangle\right)\overline{P}^{2}\left(N,\langle 2y_{u-1}\rangle\right)\overline{P}\left(N,\langle 2z\rangle\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(2,u,k)}{\ln^{2uk-1}N}\exp\left(\frac{-z^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$\left(\ z\le z_m\ ,\ y_j\le y_m\ \ ,\ x_i\le x_m\ \right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(2,u,k)}{\ln^{2uk-1}N}\left(\frac{z^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}+\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}=1\right)\tag{132}$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(2,u,k)}{\ln^{2uk-1}N}\exp\left(\frac{-z}{\sigma_e\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$\left(\ z_m\le z\ ,\ y_j\le y_m\ \ ,\ x_i\le x_m\ \right)\tag{133}$$

$$\frac{1}{\sigma_n\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}=\frac{{}^{\pm}C8\overline{P}^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}{\sqrt{2\pi}}\qquad\left(z\le z_m\right)\tag{134}$$

$$\frac{1}{\sigma_e\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}={}^{\pm}C2\overline{P}^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)\qquad\left(z_m\le z\right)\tag{135}$$

$$z_m=\frac{\sigma_n^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}{\sigma_e\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}\left(1+\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}{\sigma_n^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\tag{136}$$

$$\pi\left(N,\langle 2z,2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)={}^{1}\pi(N)\,\overline{P}\left(N,\langle 2z,2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)=\frac{{}^{1}N}{\ln N}\overline{P}\left(N,\langle 2z,2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(2,u,k)N}{\ln^{2uk}N}\exp\left(\frac{-z^2}{2\sigma_n^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$\left(z\le z_m\ ,\ y_j\le y_m\ ,\ x_i\le x_m\right) \tag{137}$$

$$=\frac{{}^{\pm}C(2,u,k)N}{\ln^{2uk}N}\exp\left(\frac{-z}{\sigma_e\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$\left(z_m\le z\ ,\ y_j\le y_m\ ,\ x_i\le x_m\right) \tag{138}$$

其中 ${}^{\pm}C(2,u,k)$ 是全部 $2uk$ 个素数形成的相关系数

证明 与相邻 K 生素数定理中对应量的证明相似，过程此略

7. 5 .4 u 生 K 生素数最小最大间距

定理 13 在 $t\le N$ 的自然数中，相邻 u 生 K 生素数 $\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle$ 之间的最小最大间距，分别记为 ${}^{\downarrow}z$ 、 ${}^{\uparrow}z$ ，则：

$${}^{\downarrow}z={}^{\pm}C\left(\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right) \tag{139}$$

$${}^{\uparrow}z={}^{1}\sigma_e\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)\ln\pi\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)=\frac{\ln\pi\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}{{}^{\pm}C2\overline{P}^2\left(N,\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)}$$

$$={}^{\pm}C(u,k)\left(\ln\frac{{}^{\pm}C(u,k)N}{\ln^{uk}N}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4ux_i^2}{\pi\ln^2 N}-\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$*\exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4ux_i^2}{\pi\ln^2 N}+\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}\right)\ln^{2uk-2}N$$

$$={}^{\pm}C(u,k)\left(\ln\frac{N}{\ln^{uk}N}\right)\ln^{2uk-2}N \qquad \left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{4ux_i^2}{\pi\ln^2 N}+\sum_{i=1}^{u-1}\frac{4y_j^2}{\pi\ln^2 N}=1\right) \tag{140}$$

其中 （1）、 ${}^{\pm}C(u,k)$ 是全部 uk 个素数形成的相关系数

（2）、因 ${}^{\downarrow}z={}^{\pm}C\left(\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle\right)$ ，即 ${}^{\downarrow}z$ 与 N 无关，故自然数中相邻 u 生 K 生素数 $\langle 2y_{u-1},2x_{k-1}\rangle$ 有无穷多个

证明　与(121)、(122)式的证明相似，过程此略

7.5.5 $\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$ 生素数定理

前面分析了K生素数问题，可认为是$K-1$个素数间距的一重生素数问题；u生K生素数问题，可认为是$uK-1$个素数间距的二重生素数问题；与此类似，可以分析K_3生K_2生K_1生素数问题，可认为是$\prod_{i=0}^{2}K_{3-i}-1$个素数间距的三重生素数问题；……；并定义一个简化表达的数学符号如下：

定义17　将K_a生K_{a-1}生……K_2生K_1生问题，用符号$\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$表达，可称为a重表达符，a重生素数可表达为$\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle$

说明　因a重表达式$\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$中，有上下标尺寸的字符，不宜再作下标表达a组每组有K_{a-i}个素数的素数集合，故写成$2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)$形式，前两重生素数如下：

$$\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{1}K_{2-i}\right)\rangle=\langle 2x\left(K_2\right),2x\left(K_1\right)\rangle=\langle 2x_{u-1},2x_{k-1}\rangle\Big|_{u=K_2}^{k=K_1}$$

$$\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{2}K_{3-i}\right)\rangle=\langle 2x\left(K_3\right),2x\left(K_2\right),2x\left(K_1\right)\rangle=\langle 2x_{v-1},2x_{u-1},2x_{k-1}\rangle\Bigg|_{\substack{k=K_1\\u=K_2\\v=K_3}}$$

定理14　在$t\le N$的自然数中，出现形如$\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle$的$a$重生素数个数及平均概率，分别记为$\pi\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)$、$\overline{P}\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)$，两相邻$\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle$生素数的间距记为$z$，$Z$，且$\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle$正指分布函数中的均方差分别记为$\sigma_n\left(\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)$及$\sigma_e\left(\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)$，则：

$$\overline{P}\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)={}^{\pm}C\prod_{i=0}^{a-1}\overline{P}^{u}\left(N,\langle 2x_j\rangle\right)\qquad\left(u=\prod_{j=i}^{a-1}K_{a-j}\text{ , }j=K_{a-i}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C}{\ln^{S-1}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{a}\frac{4S_i x_i^2}{\pi\ln^2 N}+\frac{4x_a^2}{\pi\ln^2 N}\right)\quad\left(x_i\le x_m\text{ , }S_i=\prod_{j=i}^{a-1}K_{a-j}\text{ , }S=\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C}{\ln^{S-1}N}\qquad\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{4S_i x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\frac{4x_a^2}{\pi\ln^2 N}=1\text{ , }S=\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\tag{141}$$

$$\pi\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)={}^{1}\pi(N)\overline{P}\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)=\frac{{}^{1}N}{\ln N}\overline{P}\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}CN}{\ln^{S}N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{a}\frac{4S_i x_i^2}{\pi\ln^2 N}+\frac{4x_a^2}{\pi\ln^2 N}\right)\qquad\left(x_i\le x_m\ ,\ S_i=\prod_{j=i}^{a-1}K_{a-j}\ ,\ S=\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}CN}{\ln^{S}N}\qquad\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{4S_i x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\frac{4x_a^2}{\pi\ln^2 N}=1\ ,\ S=\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\tag{142}$$

$${}^{\pm}C=\pi\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)\frac{\ln^{S}N}{N}\exp\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{4S_i x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\frac{4x_a^2}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$\left(x_i\le x_m\ ,\ ,\ S=\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\tag{143}$$

其中 ${}^{\pm}C$ 是全部 $\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$ 个素数形成的相关系数

说明 当 $K_a=2$ 时，就得到相邻 $a-1$ 重生素数定理，由此可得到与它表达形式相同的相邻 a 重生素数定理，从而不再专门叙述这个定理

7.5.6 $\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$ 生素数最小最大间距

定理 15 在 $t\le N$ 的自然数中，相邻 $\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$ 生素数 $\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle$ 之间的最小最大间距，分别记为 ${}^{\downarrow}z$ 、${}^{\uparrow}z$，则：

$${}^{\downarrow}z={}^{\pm}C\left(\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)\tag{144}$$

$${}^{\uparrow}z={}^{1}\sigma_e\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)\ln\pi\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)=\frac{\ln\pi\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)}{{}^{\pm}C2\overline{P}^{2}\left(N,\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)}$$

$$={}^{\pm}C\left(\ln\frac{N}{\ln^{S}N}\right)\ln^{2S-2}N\qquad\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{4S_i x_i^2}{\pi\ln^2 N}-\frac{4x_a^2}{\pi\ln^2 N}=1\ ,\ S=\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\tag{145}$$

其中 （1）、 ${}^{\pm}C$ 是全部 $\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$ 个素数形成的相关系数

（2）、因 ${}^{\downarrow}z={}^{\pm}C\left(\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle\right)$，即 ${}^{\downarrow}z$ 与 N 无关，故自然数中相邻 $\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}$ 生素数 $\langle 2x\left(\prod_{i=0}^{a-1}K_{a-i}\right)\rangle$ 有无穷多个

证明　　与(121)、(122)式的证明相似，过程此略

总结

（1）、本章与二生素数定理相关的定理：如K生素数定理、a重生素数定理等，基本上可以相互推导；

（2）、K生素数定理，要求提供$K-1$个相邻素数的间距，才能使用；当它由若干组相同的素数间距集合组成时，可使用u生K_1生素数定理，这时只需要提供$u+K_1-2$个素数间距，就能使用，因$uK_1=K$，故减少了计算量；同理，每个素数集合又由相同的更小素数集合组成时，就可用a重生素数定理，从而进一步减少了计算量，并增加了表达计算的内容

(3)、最密5生素数有两种，段长均是12，起点素数p_1分别是5和7，素数间距分别是（p，p+2，p+6，p+8，p+12）和（P，P+4，p+6，p+10，p+12），故分别表为5（p，p+2，p+6，p+8，p+12），7（P，P+4，p+6，p+10，p+12）。相同段长的最密K生素数的不同素数间距组合有多少种是未能解决的问题。附录4中仅列出了形如7（P，P+4，p+6，p+10，p+12）的最密5生素数

第八章
熊一兵——哥德巴赫问题

注意 1　本章中表示素数的符号（如 p ）一般表示 K 生素数（如 $p\langle d_{k-1}\rangle$ ）。多个用运算符号连接而相邻的 K 生素数表达符，可在右边标注一个 $\langle d_{k-1}\rangle$ 符号即可

注意 2　本章中表示出现 K 生素数概率或个数的值，如 $P\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$ 或 $\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$，分别由第七章 K 生素数中的 (31) 、(32) 式决定

定义 1　将哥德巴赫问题与 K 生素数问题结合，产生新的素数问题，称为熊一兵——哥德巴赫问题

在“哥德巴赫猜想”一章中，用 K 生素数的量代替对应素数的量，各量的表达作相应改变，原则上就能得到本章内容。下面仅列若干定义、定理等，省略部分证明过程

8.1　熊一兵——哥德巴赫方程

定义 3　将下面由 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 构成的方程，称为熊一兵——哥德巴赫方程

$$p_1\langle d_{k-1}\rangle+p_2\langle d_{k-1}\rangle+\cdots\cdots p_s\langle d_{k-1}\rangle=N+s\bmod 2\quad\left(3\le p_{i-1}\le p_i\right)$$

它是哥德巴赫猜想，在 K 生素数中的推广，上面 K 生素数方程可简化表达如下

$$p_1+p_2+\cdots\cdots p_s\langle d_{k-1}\rangle=N+s\bmod 2\quad\left(3\le p_{i-1}\le p_i\right)\qquad(1)$$

与证明哥德巴赫方程是均分问题类似，可以证明熊一兵——哥德巴赫方程是均分问题，此略

8.1.1 熊一兵数

定义 4　将满足 K 生素数方程 (1) 的解数——K 生素数组 $\left\{p_i\langle d_{k-1}\rangle\right\}$ 的不同组合个数——分析解的个数，称为 s 维 K 生熊一兵数，简称熊数，记为 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$；　$s=2$ 时简称偶熊数，$s=3$ 时简称奇熊数

由于相同范围的自然数中，K 生素数比素数少，同一方程的熊一兵数比哥德巴赫数少

ξ8.1.2 熊一兵数定理

定义 5 将 $N \le x$ 的熊数 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$ 之和，称为 s 维 K 生熊一兵数定理，简称熊数定理，记为 $\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$、$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$，即

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=\sum_{n=0}^{0.5x-1.5s} x\left(2n+3s,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=^{1}\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) \qquad (2)$$

定理 1

$$x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)-\pi\left(x-2,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) \qquad (3)$$

$$X\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=2\frac{\partial}{\partial x}\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=^{1} x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) \qquad (4)$$

$$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=0.5\int^{x} X\left(t,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)dt=^{1}\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) \qquad (5)$$

证明　由定义中的(2)式得

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=\sum_{n=0}^{0.5x-1.5s} x\left(2n+3s,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$$

$$=x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)+\sum_{n=0}^{0.5x-1.5s-1} x\left(2n+3s,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$$

$$=x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)+\pi\left(x-2,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$$

$$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=X\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)+^{1}\Pi\left(x-2,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$$

$$=X\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)+\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)-2^{1}\frac{\partial}{\partial x}\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$$

整理上式得本定理

8.1.3 熊一兵——哥德巴赫 6 个命题

仿照王元院士哥德巴赫(C.Goldback)的 5 个命题提法，将熊一兵——哥德巴赫 6 个命题简叙如下

(A) 足够大的偶数 N，都是两 K 生素数之和

(B) 足够大的奇数 N，都是三 K 生素数之和

(C) 足够大的整数 N，都可以表为不超过 S 个 K 生素数方程均成立

(D) 偶数 N 表为两奇 K 生素数和的表法个数 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$

(E) 奇数N表为三奇K生素数和的表法个数$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$

(F) 自然数N，表为s个K生素数之和的表法个数，记为$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$

下面解决这6个命题

8.1.4 熊一兵数随机计算法

定理2 N的偶K生熊一兵数记为$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) =^1 X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) =^1 0.5NP^2\left(0.5N,\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (6)$$

$$\sigma\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) =^{\pm} \sqrt{0.5NCP^2\left(0.5N,\langle d_{k-1}\rangle\right)} \qquad (7)$$

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) =^{\pm} \sqrt{0.5NCP^2\left(0.5N,\langle d_{k-1}\rangle\right)2\ln\ln N} \qquad (8)$$

其中 $P\left(0.5N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$的值由第7章$(31)$式决定

证明 由定义3可知，计算N的偶K生熊一兵数，等价于计算下面K生素数方程

$$p_1 + p_2\langle d_{k-1}\rangle = N \quad \left(3 \le p_1 \le p_2\right) \qquad (9)$$

的解数，它等价于统计下面整数方程

$$x + y = N \quad \left(3 \le x \le y\right) \qquad (10)$$

在x，y同时是K生素数：$x\langle d_{k-1}\rangle$、$y\langle d_{k-1}\rangle$的条件下，K生素数组$\left\{x,y\langle d_{k-1}\rangle\right\}$即$\left\{x,N-x\langle d_{k-1}\rangle\right\}$的不同组合个数$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$

x，y分别及同时出现K生素的概率，分别记为$P\left(x\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$P\left(y\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$P\left(x,y\langle d_{k-1}\rangle\right)$，则

$$P\left(x,y\langle d_{k-1}\rangle\right) = P\left(x\langle d_{k-1}\rangle\right)P\left(y\langle d_{k-1}\rangle\right) = P\left(x\langle d_{k-1}\rangle\right)P\left(N-x\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (11)$$

在整数方程(10)中，把每一组满足方程(7)的x，y值构成的数组(x,y)，同时是K生素数的现象，看成是随机事件$\xi\left(x,y\langle d_{k-1}\rangle\right)$，则

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) = \sum_{x=3}^{0.5N}\xi\left(x,y\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (12)$$

并近似成数组（x，y）同时出现K生素数的概率$P\left(x,y\langle d_{k-1}\rangle\right)$，为其x在定义域

$(3,0.5N)$ 内的平均 K 生素数概率 $\overline{P}(x,y\langle d_{k-1}\rangle)$ 为

$$\overline{P}(x,y\langle d_{k-1}\rangle)=\frac{2}{N}\int^{0.5N}P(x,N-x\langle d_{k-1}\rangle)\,dx$$

$$=\frac{2^{\pm}C}{N}\int^{0.5N}P(x\langle d_{k-1}\rangle)P(N-x\langle d_{k-1}\rangle)\,dx$$

$$=\frac{2^{\pm}C}{N}\int^{0.5N}P\left(\frac{N}{4}\langle d_{k-1}\rangle\right)P\left(\frac{3N}{4}\langle d_{k-1}\rangle\right)dx$$

$$=\,^{1}P\left(\frac{N}{4}\langle d_{k-1}\rangle\right)P\left(\frac{3N}{4}\langle d_{k-1}\rangle\right)=\,^{1}P^{2}(0.5N\langle d_{k-1}\rangle)$$

试验次数为 $0.5N$ 的等几率贝努里试验模型，进行近似求解，这个模型服从二项分布 [4] P77 ，N 值较大时，可近似成普阿松分布 [4] P95 。熊数理论值记为 $X(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$，在概率论中又称它为数学期望 [4] P165 ，得

$$x(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)=^{1}X(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)=^{1}0.5N\overline{P}(x,y\langle d_{k-1}\rangle)$$

$$=^{1}0.5NP^{2}(0.5N\langle d_{k-1}\rangle)=^{1}\lambda=^{1}\sigma^{2}(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$$

式中，λ 是普阿松分布参数，既是 $x(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$ 的数学期望，又是 $x(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$ 的方根。整理上式得定理中 $x(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$ 、$\sigma(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$ 的表达式

8.1.5 S 维熊一兵数

定理 3 熊一兵——哥德巴赫问题的分析提法(D)、(E)及(F)，即 K 生素数方程(1) 的解数 $x(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)$ 、$x(N,\langle d_{k-1}\rangle_3)$ 、$x(N,\langle d_{k-1}\rangle_4)$ 、 ⋯⋯ 、 $x(N,\langle d_{k-1}\rangle_s)$ 等，可表为

$$x(N,\langle d_{k-1}\rangle_2)=^{1}2P^{2}(N\div 2,\langle d_{k-1}\rangle)H(1,2,0)N \tag{13}$$

$$x(N,\langle d_{k-1}\rangle_3)=^{1}2P^{3}(N\div 3,\langle d_{k-1}\rangle)H(1,3,0)N^{2} \tag{14}$$

$$x(N,\langle d_{k-1}\rangle_4)=^{1}2P^{4}(N\div 4,\langle d_{k-1}\rangle)H(1,4,0)N^{3} \tag{15}$$

…………………………………………

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) =^1 X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) =^1 2P^s\left(N \div s,\langle d_{k-1}\rangle\right) H(1,s,0) N^{s-1} \quad (16)$$

其中 $P\left(N \div s,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第 7 章(31) 式决定

证明　证明过程与“s 维哥德巴赫数”相似，将素数率 $P(N \div s)$ 换成 K 生素数率 $P^s\left(N \div s,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 即可，具体过程略

8. 2　熊一兵——哥德巴赫“ 1+u”问题

定义 6 偶数 N 表为一个 K 小素数 $p\langle d_{k-1}\rangle$，与一个含 u 个 K 小素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 因子积的合数之和

$$N = p + p_1 p_2 \cdots\cdots p_u \langle d_{k-1}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} p\langle d_{k-1}\rangle \le N-3^u,\quad 3 \le p_1\langle d_{k-1}\rangle \le \sqrt[u]{N-p\langle d_{k-1}\rangle} \\ p_{i-1}\langle d_{k-1}\rangle \le p_i\langle d_{k-1}\rangle \le \left[\left(N-p\langle d_{k-1}\rangle\right) \div \left(p_1 p_2 \cdots\cdots p_{i-1}\langle d_{k-1}\rangle\right)\right]^{\frac{1}{u-i+1}} \end{pmatrix} (17)$$

的问题，　称为熊一兵——哥德巴赫“1+ u”问题，简称为“1+u”问题，此两数 p、$p_1 p_2 \cdots\cdots p_u$ 不同组合的表法个数，称为“1+u” 熊一兵——哥德巴赫数，简称“1+u”熊哥数

只需要将偶数 N 的“1+2”哥数中素数概率，换成对应 K 生素数概率即可

定理 4 偶数 N 的“1+2” 熊一兵——哥德巴赫数记为 $x\left(1+2,N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，则

$$x\left(1+2,N,\langle d_{k-1}\rangle\right) =^1 \overline{P}\left(\frac{N}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4},\langle d_{k-1}\rangle\right)\overline{P}\left(\frac{3\sqrt{2N}}{4},\langle d_{k-1}\rangle\right)\frac{3N^2}{16} \quad (18)$$

其中 $\overline{P}\left(\frac{N}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$\overline{P}\left(\frac{\sqrt{2N}}{4},\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 及 $\overline{P}\left(\frac{3\sqrt{2N}}{4},\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第 7 章(31) 式决定

证明　与第 6 章表达式(35) 式相似，过程略

8. 3 熊一兵数准确值

8. 3.1 偶熊一兵数准确值

定理 5 N 表为两 K 生素数 $p_1\langle d_{k-1}\rangle$、$p_2\langle d_{k-1}\rangle$之和

$$p_1 + p_2\langle d_{k-1}\rangle = N \quad \left(p_1\langle d_{k-1}\rangle \le p_2\langle d_{k-1}\rangle \right) \tag{19}$$

的不同表法个数——偶熊一兵数，记为 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) = \sum_{3\le p\langle d_{k-1}\rangle \le 0.5N} \left[\pi\left(N-p,\langle d_{k-1}\rangle\right) - \pi\left(N-p-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)\right] \tag{20}$$

注　$\pi\left(N-p,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$\pi\left(N-p-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第七章中(32) 式决定

证明　　略

8. 3.2 奇熊一兵数准确值

定理 6 奇数 $N=2n+1$ 表为三 K 生素数 $p_1\langle d_{k-1}\rangle$、$p_2\langle d_{k-1}\rangle$、$p_3\langle d_{k-1}\rangle$之和

$$p_1 + p_2 + p_3\langle d_{k-1}\rangle = N = 2n+1 \quad \left(p_1 \le p_2 \le p_3 \right) \tag{21}$$

的表法个数——奇熊一兵数记为 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$，则

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right) =^1 X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$$

$$= \sum_{\substack{3\le p_1\langle d_{k-1}\rangle \le x\div 3 \\ p_1\langle d_{k-1}\rangle \le p_2\langle d_{k-1}\rangle \le x-p_1\langle d_{k-1}\rangle}} \left[\pi\left(N-p_1-p_2,\langle d_{k-1}\rangle\right) - \pi\left(N-p_1-p_2-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)\right] \tag{22}$$

注 1 上面的求和符号$\sum$，是对 2 个能自由取值的 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$进行求和运算

注 2 $\pi\left(x-\sum_{j=1}^{i+1} p_j,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$\pi\left(\sum_{j=1}^{i+1} p_j - 1,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第七章中(32) 式决定

证明　方法同上，此略

8. 3.3 S 维熊一兵数准确值

定理 7 整数 N 表为 S 个 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 和

$$p_1+p_2+\cdots+p_s\langle d_{k-1}\rangle=N=2n+s\bmod 2 \quad \left(p_i\le p_{i+1}\right) \tag{23}$$

的表法个数——奇熊一兵数记为 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$，则

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=^1 X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$$

$$=\sum_{\substack{3\le p_1\langle d_{k-1}\rangle\le x/s \\ p_i\le p_{i+1}\langle d_{k-1}\rangle\le x-\sum_{j=1}^{i}p_j\langle d_{k-1}\rangle}}\left[\pi\left(x-\sum\nolimits_{j=1}^{i+1}p_j,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\pi\left(\sum\nolimits_{j=1}^{i+1}p_j-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)\right]$$

$$(24)$$

注 1 上面的求和符号 $\sum$ ，是对 $s-1$ 个能自由取值的 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 进行求和运算

注 2 $\pi\left(x-\sum_{j=1}^{i+1}p_j,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$\pi\left(\sum_{j=1}^{i+1}p_j-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第七章中 (32) 式决定

证明　方法同上，此略

8. 4 熊一兵数定理准确值

8. 4.1 偶熊一兵数定理准确值

定理 8 将偶数 $N\le x$ 的偶熊一兵数 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$ 的累计值——偶熊数定理，记为 $\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\sum_{n=3}^{0.5x}x\left(2n,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$$

$$=\sum_{3\le p\le 0.5x}\left[\pi\left(x-p,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\pi\left(p-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)\right]=^1\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right) \tag{25}$$

$$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)-\pi\left(x-2,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) \tag{26}$$

注　$\pi\left(x-p,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$\pi\left(p-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第七章中 (32) 式决定

证明　略

8. 4.2 奇熊一兵数定理准确值

定理 9 将 $N \le x$ 的奇数 N 的奇熊数 $x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$、$X\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$ 的累计值——奇熊数定理，记为 $\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$，$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$，则

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)=\sum_{n=0}^{0.5x-4.5} x\left(2n+9,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$$

$$=\sum_{\substack{3\le p_1\langle d_{k-1}\rangle\le x\div 3\\ p_1\langle d_{k-1}\rangle\le p_2\langle d_{k-1}\rangle\le x-p_1\langle d_{k-1}\rangle}}\left[\pi\left(x-p_1-p_2,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\pi\left(p_1+p_2-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)\right] \tag{27}$$

$$x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)=\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)-\pi\left(x-2,\langle d_{k-1}\rangle_3\right) \tag{28}$$

注 1 上面的求和符号 $\sum$ ，是对 2 个能自由取值的 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 进行求和运算

注 2 $\pi\left(x-p_1-p_2,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$\pi\left(p_1+p_2-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 的值，由第七章中 (32) 式决定

证明　因偶熊一兵——哥德巴赫猜想成立，故每个充分大奇数都有机会成为三个 K 生素数之和。

统计奇熊一兵数定理准确值时，分两步走：

（1）、统计 $N+3$ 内某奇数 $2n+9$ 的奇熊数：即统计 3 个 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 之和，等于 $2n+9$ 时的不同组合个数，记为 $x\left(2n+9,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$，则

$$p_1+p_2+p_3\langle d_{k-1}\rangle=2n+9$$

$$x\left(2n+9,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)=\sum_{\substack{3\le p_1\langle d_{k-1}\rangle\le n\div 3\\ p_1\langle d_{k-1}\rangle\le p_2\langle d_{k-1}\rangle\le n-p_1\langle d_{k-1}\rangle}} 1$$

（2）、n 在 $\left(0,\dfrac{x-9}{2}\right)$ 内，对奇熊数 $x\left(2n+9,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$ 进行累加，就得 (27) 式的两个

表达式。其中，仿照(19)式的分析过程可得(27)式的后一表达式，仿照(3)式得(28)式

8.4.3 S维熊一兵数定理准确值

定理10 将$2n=N\le x$的整数N的S维熊数$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$、$x\left(N,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$的累计值——S维哥数定理，记为$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$，$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$，则

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=\sum_{n=0}^{0.5x-4.5} x\left[2n+9,\langle d_{k-1}\rangle_s\right]$$

$$=\sum_{\substack{3\le p_1\,\langle d_{k-1}\rangle\le x\div s\\ p_i\le p_{i+1}\le x-\sum_{j=1}^{i}p_j\,\langle d_{k-1}\rangle}}\left[\pi\left(x-\sum_{j=1}^{i+1}p_j,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\pi\left(\sum_{j=1}^{i+1}p_j-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)\right]$$

$$(29)$$

$$x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)-\pi\left(x-2,\langle d_{k-1}\rangle_s\right) \qquad (30)$$

注1 上面的求和符号$\sum$，是对$s-1$个能自由取值的K生素数$p_i\langle d_{k-1}\rangle$进行求和运算

注2 $\pi\left(x-\sum_{j=1}^{i+1}p_j,\langle d_{k-1}\rangle\right)$，$\pi\left(\sum_{j=1}^{i+1}p_j-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)$的值，由第七章中$(32)$式决定

证明 参照第6章(50)、(51)式，得(29)、(30)式

8.5 熊一兵数定理渐近解

8.5.1 偶熊一兵数定理渐近解

定理11 x的偶熊一兵数定理，记为$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=^1\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=^1\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (31)$$

其中 $\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$的值，由第七章K生素数中，$(32)$式给出

证明　可参照第 6 章(29)式，或直接　计算如下：

由(25)式，得

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\sum_{3\le p\langle d_{k-1}\rangle\le 0.5x}\left\{\pi\left(x-p,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\left[\pi\left(p\langle d_{k-1}\rangle\right)-1\right]\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}\left[\pi\left(x-p_i,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\pi\left(p_i\langle d_{k-1}\rangle\right)+1\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}\left[\pi\left(x-p_i,\langle d_{k-1}\rangle\right)-i\right]+\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}\pi\left(x-p_i,\langle d_{k-1}\rangle\right)-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)+\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}\pi\left(x-\frac{x}{4},\langle d_{k-1}\rangle\right)-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=^{1}\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=^{1}\frac{3}{2}\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)\sum_{i=1}^{\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}1-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=^{1}\frac{3}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)-\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)=^{1}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

得本定理$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$等表达式

8. 5.2 奇熊一兵数定理渐近解

定理 12 x 的奇熊一兵数定理，记为$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$、$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)$，则

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)=^{1}\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_3\right)=\frac{^{1}\pi^3\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right)H(1,3,0)}{3}\qquad(32)$$

其中　$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right)$的值，由第七章 K 生素数中，$(32)$式给出

证明　与(31)式的计算过程相似，或参照第6章(30)式，过程此略

8. 5.3 S维熊一兵数定理渐近解

定理13　将x的S维熊一兵数定理，分别记为$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$、$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)$，则

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)={}^1\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_s\right)=\frac{{}^1\pi^s\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right)H(1,s,0)}{s} \tag{33}$$

其中　$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right)$的值，由第七章K生素数中，$(32)$式给出

证明　与第6章中(54)式的计算过程相似，过程此略

8. 6 熊一兵数的估值

定理14　将x偶熊数$x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$的平均值，记为$\bar{x}\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$\bar{x}\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\frac{{}^{\pm}\pi^2\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right)}{x} \tag{34}$$

证明　仿照第6章(46)式及熊一兵数定理(31)式，得

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\sum_{n=3}^{0.5x}x\left(2n,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)={}^{\pm}\sum_{n=3}^{0.5x}\bar{x}\left(2\frac{x}{4},\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$$

$$={}^{\pm}\bar{x}\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle_2\right)\sum_{n=3}^{0.5x}1={}^{\pm}\bar{x}\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle_2\right)\frac{x}{2}$$

整理上式，并用x代替$0.5x$得定理中$\bar{x}\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$的表达式。$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle\right)$的值由第7章$(32)$式决定

8. 7 熊一兵数渐近解

8.7.1 偶熊一兵数渐近解

定理 15 x 的偶熊一兵数，记为$x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$X\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$x\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=^1 X\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\frac{^1 2}{x}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (35)$$

证明　　与第 6 章中(56)式相似，过程略

引理 1

$$\sum_{3\le p\ \langle d_{k-1}\rangle\le 0.5x}\pi\left(p-1,\langle d_{k-1}\rangle\right)=\frac{^1 1}{2}\left[\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)-1\right]\pi\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)$$

$$=\frac{^1 1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (36)$$

证明　与第 6 章中(56)式相似，过程略

定理 16　设 x 的偶熊一兵数定理，记为$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$、$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，边界记为$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，均方差记为$\sigma\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)$，则

$$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\frac{^1 1}{2}\pi^2\left(\frac{x}{2},\langle d_{k-1}\rangle\right)+\int_3^{0.5x}\Pi\left(t,\langle d_{k-1}\rangle\right)P\left(x-t,\langle d_{k-1}\rangle\right)dt \qquad (37)$$

$$\pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)\pm\ \Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right) \qquad (38)$$

$$\Pi\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=^{\pm}\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right)\sqrt{2\ln\ln x} \qquad (38)$$

$$\sigma\left(x,\langle d_{k-1}\rangle_2\right)=^{\pm}\pi\left(0.5x,\langle d_{k-1}\rangle\right) \qquad (40)$$

证明　仿照第 6 章(60)：(64)式的证明

8. 7.2 偶孪生素数定理——梁定祥猜想

下面网址介绍了“梁定祥猜想”，
http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=3661&Forum_id=7
即下面将介绍的孪小素数之和——偶孪生素数定理的问题，发帖网址：
http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?page=2&Topic_ID=23773&forum_id=10

定义 7　孪生素数中.较小的素数，称为孪小素数

定义 8　不大于 N 表为 $p\langle 2\rangle$ 或 $\langle 2\rangle_2$ 的孪生素数个数，记为 $\pi(N,1)$，偶数 2t 表为两孪大素数 $p_1\langle 2\rangle$、$p_2\langle 2\rangle$ 之和的表法个数，记为 $x(2t,\langle 2\rangle_2)$，$2t \le N$ 的 $x(2t,\langle 2\rangle_2)$ 累计值称为偶孪生素数定理，记为 $\pi(N,\langle 2\rangle_2)$，即

$$\pi(N,\langle 2\rangle_2) = \sum_{t\le 0.5N} x(2t,\langle 2\rangle_2)$$

定理 17

$$\pi(N,\langle 2\rangle_2) =^{1} \pi^{2}(0.5N,1) =^{1} \left[\frac{8^{\pm}C_n\pi^{2}(0.5N)}{\pi N}\exp\left(-\frac{16\pi^{2}(0.5N)}{\pi N^{2}}\right)\right]^{2} \qquad (41)$$

$$^{1}1 = \frac{\pi(N,\langle 2\rangle_2)}{\pi^{2}(0.5N,1)} \qquad (42)$$

证明　略

偶孪生素数定理 $\pi(N,\langle 2\rangle_2)$ 数据表

i	N	$\pi(N,\langle 2\rangle_2)$	$\pi(0.5N,\langle 2\rangle)$	$^{1}1$
1	10	3	1	0．3333
2	$2*10$	6	2	0．6667
3	10^2	32	6	0.8889
4	$2*10^2$	72	8	1．1250
5	10^3	490	21	1．1111
6	$2*10^3$	1234	35	1．0073
7	10^4	13721	126	0．8643
9	$2*10^4$	37289	205	0．8873
10	10^5	452011	705	0．9094
11	$2*10^5$	1392709	1224	0．9296
12	10^6	19623407	4565	0．94166
13	$2*10$		8169	

$\pi(0.5N,\langle 2\rangle)$ 表示不大于 0.5N 的孪生素数个数，表中 $\pi(N,\langle 2\rangle_2)$ 数据由东陆论坛网友天山草在下面网址提供，借此谢谢！

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?page=2&Topic_ID=23773&Forum_ID=10

100 内的孪生素数（第一个数由天山草定义为孪小素数）有：（3，5）、（5，7）、（11，13）、（17，19）、（29，31）、（41，43）、（59，61）、（71，73）共 8 个，即

$\pi(0.5N=100,1)=8$

101 到 200 的孪生素数有：（101，103）、（107，109）、（137，139）、（149，151）、（179，181）、（191，193）、（197，199）共 7 个，即 $\pi(0.5N=200,1)=15$

在 $\pi\left(N=10,\langle 2\rangle_2\right)$ 中有 3+3、3+5，5+5，则 $\pi\left(N=10,\langle 2\rangle_2\right)=3$

在 $\pi\left(N=20,\langle 2\rangle_2\right)$ 中有 3+3、3+5、3+11、3+17，5+5、5+11，则 $\pi\left(N=20,\langle 2\rangle_2\right)=6$

在 $\pi\left(N=100,\langle 2\rangle_2\right)$ 中有 3+3、…、3+71，计 8 个；

有 5+5、…、5+71，计 7 个，计 7 个；….

共=8+7+6+5+4+2=32，则 $\pi\left(N=100,\langle 2\rangle_2\right)=32$

在 $\pi\left(N=200,\langle 2\rangle_2\right)$ 中有

3+3、…、3+197，计 15 个；
5+5、…、5+191，计 13 个；
11+11、…、11+179，计 11 个；
17+17、…、17+179，计 10 个；
29+29、…、29+149 计 8 个；
41+41、…、41+149，计 7 个；
59+59、…、59+107，计 4 个；
71+71、…、71+107，计 3 个；

共=15+13+11+10+8+7+4+3=71， $\pi\left(N=200,\langle 2\rangle_2\right)=71$

下面是 200 以内偶数拆成“孪小”的情况，累加得 72：

N x(N,1) π(N,1)
6 1 1， 3+3
8 1 2， 3+5
10 1 3， 5+5
12 0
14 1 4， 3+11
16 1 5， 5+11
18 0
20 1 6， 3+17
22 2 8， 5+17 ， 11+11
24 0
26 0
28 1 9， 11+17
30 0
32 1 10， 3+29
34 2 12， 5+29 ， 17+17

36 0
38 0
40 1 13 , 11+29
42 0
44 1 14 , 3+41
46 2 16 , 5+41 , 17+29
48 0
50 0
5 1 17 , 11+41
54 0
56 0
58 2 19 , 17+41 , 29+29
60 0
62 1 20， 3+59
:64 1 21 , 5+59
66 0
68 0
70 2 23 , 11+59 , 29+41
72 0
:74 1 24 , 3+71
76 2 26 , 5+71 , 17+59
78 0
80 0
82 2 28 , 11+71 , 41+41
84 0
86 0
88 2 30 , 17+71 , 29+59
90 0
92 0
94 0
96 0
98 0
100 2 32， 29+71，41+59
104 1 33， 3+101
106 1 34 , 5+101
108 0 34
110 1 35 , 3+107
112 3 38 , 5+107 , 11+101 , 41+71
114 0 38
116 0 38
118 3 41 , 11+107 , 17+101 , 59+59
120 0 41
122 0 41
124 1 42 , 17+107

126　0　42

128　0　42

130　2　44，　29+101，59+71

132　0　44

134　0　44

136　1　45，　29+107

138　0

140　1　46

142　3　49，　5+137，41+101，71+71

144　0

146　0

148　2　51，　（11+137），41+107

150　0

152　1　52，　3+149

154　2　54　，　5+149　，　（　17+137　）

156　0

158　0

160　2　56　，　11+14959+101

162　0

164　0

166　3　59　，　17+149　，　（　29+137　）　，　59+107

168　0

170　0

178　3　62　，　29+149　，　（　41+137　）　，　71+107

180　0

182　1　63　，　（　3+179　）

184　1　64　，　5+179

186　0

188　0

190　2　66　，　11+179　，　41+149

194　1　67　，　3+191

196　3　70　，　5+191　，　17+179　，　（　59+137　）

198　0

:200　1　71　，　3+197

s1= 72 ………………200 以内拆分成“䔣小”累计为 72

8．8 广义熊一兵——哥德巴赫方程

定义 9　将下面 K 生素数 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$ 的 $H_{i,j}$ 次幂之和，等于自然数 N_j 的 u 行方程组，称为广义熊一兵——哥德巴赫方程：

$$\begin{cases} p_1^{H_{1,u}} + p_2^{H_{2,u}} + \cdots\cdots + p_s^{H_{s,u}} \langle d_{k-1} \rangle = N_u \\ p_1^{H_{1,u-1}} + p_2^{H_{2,u-1}} + \cdots\cdots + p_s^{H_{s,u-1}} \langle d_{k-1} \rangle = N_{u-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^{H_{1,1}} + p_2^{H_{2,1}} + \cdots\cdots + p_s^{H_{s,1}} \langle d_{k-1} \rangle = N_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} p_{i-1}\langle d_{k-1}\rangle \le p_i \langle d_{k-1}\rangle \\ 1 = N_j \\ 1 \le i \le s \\ 1 \le j \le u \end{pmatrix} (42)$$

它是广义哥德巴赫猜想的推广

求解上述广义熊一兵——哥德巴赫方程(42)式，与第6章广义哥德巴赫方程(67)式相似，将素数的量，换成对应K生至少数的量：如素数变量 p_i 换成K生素数变量 $p_i\langle d_{k-1}\rangle$、素数定理换成K生素数定理、素数率换成K生素数率等即可，此略

第九章　若干条件素数问题

9.1　柯召素数问题

9.1.1 一般柯召素数

定义 1　十进制数码之和仍是素数的素数，称为柯召素数。如 11，23，29，41，43，47，61，……，因柯召对此问题，较早作过研究，由此命名

定理 1 柯召素数 $X_1 \le N$ 的个数，记为 $\pi_k(N)$ 、$\Pi_k(N)$，则

$$\pi_k(N) =^1 \Pi_k(N) = {}^{\pm}C\pi(N)\ln^{-1}\left(\frac{9\ln 0.5N}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right) \tag{1}$$

实际数据更好地支持以下关系

$$\pi_k(N) =^1 \frac{\pi(N)}{\ln\ln N} \tag{2}$$

证明　自然数 x 在十进制中，可表为 K 位数，K 的平均值表为 $\bar{k}$，则

$$k=\left[\log_{10} x\right]+1\ ,\quad k=\frac{\ln x}{\ln 10}+^1\frac{1}{2}\quad ,\qquad \bar{k}=\frac{\ln x}{\ln 10}+\frac{1}{2} \tag{3}$$

因 x 在 $\left(10^k,10^{k+1}-1\right)$ 内是随机取值的，x 的数码之和 X_2 将呈以平均值 $\bar{k}$ 为中心对称分布，X_2 的平均值记为 $\overline{X}_2$，因 X_2 最小值是 1，最大值是 $9k$，但这两个数都只出现一次，出现次数最多的是平均值 $\overline{X}_2$ 附近的数，显然

$$\overline{X}_2=\frac{1+9\bar{k}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\left(\frac{\ln x}{\ln 10}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9\ln x}{2\ln 10}+\frac{11}{4}$$

$$\ln\overline{X}_2 =^1 \ln\left(\frac{9\ln x}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right) \tag{4}$$

X、X_2 及 $\overline{X}_2$ 的素数率记为 $P(x)$ 、$P(X_2)$ 、$P(\overline{X}_2)$ 。X、X_2 两者同时为素数——出现柯召素数的概率，记为 $P_k(x)$，　暂作广义非等几条件处理得，素数系数记为 ${}^{\pm}C$

$$P_k(x)={}^{\pm}CP(x)P(X_2)={}^{\pm}CP(x)P(\overline{X}_2)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C}{\ln x}\frac{1}{\ln \overline{X}_2}=\frac{{}^{\pm}C}{\ln x\ln\left(\frac{9\ln x}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right)} \quad (5)$$

$$\Pi_k(N)={}^{1}\int^{N}P_k(x)dx=\int^{N}\frac{{}^{\pm}Cdx}{\ln x\ln\left(\frac{9\ln x}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right)}=\frac{{}^{\pm}C}{\ln\left(\frac{9\ln 0.5N}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right)}\int^{N}\frac{dx}{\ln x}$$

$$={}^{\pm}C\Pi(N)\ln^{-1}\left(\frac{9\ln 0.5N}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right)={}^{\pm}C\pi(N)\ln^{-1}\left(\frac{9\ln 0.5N}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right)$$

得本定理$\Pi_k(N)$及$\pi_k(N)$的表达式

由于在X_2最小值1附近，比在它对称位置的最大值$9k$附近，出现素数的概率大得多，且它俩的概率之差随$\overline{X}_2$的增加而增加，它俩的平均素数率，将大于$\overline{X}_2$处的素数率，尽管在这两个位置出现的次数较少，但它们的数量随着$\overline{X}_2$的增加而同步增加，当然比例应该有所下降。故产生的相对误差不因$\overline{X}_2$值的增加，而快速下降。上面这种近似方法计算的理论值，将明显小于严格意义上计算的理论值——即实际值。由于上面近似计算的方法缺陷，将产生较明显的系统误差。从下面的.实际数据表中，也反应了这个误差，笔者暂时没找到更好的近似计算方法

表 9.1　柯召素数数据表

N	$\pi(N)$	$\pi_k(N)$	$\Pi_k(N)_0$	${}^{\pm}C$
100	25	10	10.91	0.9168
200	46	23	19.01	1.2102
500	95	50	36.99	1.3516
1，000	168	83	62.99	1.3176
2，000	303	150	126.15	1.1891
5，000	668	332	233.20	1.4237
10，000	1229	584	418.18	1.3965
20，000	2262	1044	751.96	1.3884
50，000	5133	2242	1659.6	1.3509
100，000	9592	3877	2881.8	1.3453
200，000	17984	7215	5604.5	1.2873
500，000	41538	16295	12669.1	1.2862
1000，000	78498	30117	23583.9	1.2770
2000，000	148933	56854	44116.8	1.2887

其中　$\Pi_k(N)_0=\pi(N)\ln^{-1}\left(\frac{9\ln 0.5N}{2\ln 10}+\frac{11}{4}\right)$，　${}^{\pm}C=\frac{\pi_k(N)}{\Pi_k(N)_0}$

实际数据更好地支持以下关系

$$\Pi_k\left(N\right)_1=\frac{\pi\left(N\right)}{\ln\ln N}\quad ,\quad {}^{1}1=\frac{\pi_k\left(N\right)}{\Pi_k\left(N\right)_1}=\frac{\ln\ln N}{\pi\left(N\right)}$$

表 9.2　相符更好的柯召素数数据表

N	$\pi(N)$	$\pi_k(N)$	$\Pi_k(N)_1$	$^{1}1$
100	25	10	16.37	0.6109
200	46	23	27.59	0.8337
500	95	50	52.00	0.9615
1，000	168	83	86.93	0.9548
2，000	303	150	149.39	1.0041
5，000	668	332	311.85	1.0646
10，000	1229	584	553.52	1.0551
20，000	2262	1044	986.5	1.0583
50，000	5133	2242	2155.5	1.0401
100，000	9592	3877	3925.6	0.9876
200，000	17984	7215	7188.0	1.0038
500，000	41538	16295	16135.5	1.0099
1000，000	78498	30117	29895.0	1.0074
2000，000	148933	56854	55681.1	1.0211

9. 1.2 广义柯召素数

定义 2　素数 X_1 的数码之和，是表为 X_2 的素数；素数 X_2 大于 10 时，其数码之和，是表为 X_3 的素数；……，　依此类推，直到 X_R 是不大于 10 的素数，将具有这种特点的素数 X_1，称为广义柯召素数，如(83,11,2)

定理 2 不大于 N 的广义柯召素数的个数记为 $\pi_{gk}\left(N\right)$，则

$$\pi_{gk}\left(N\right)={}^{\pm}B\int^{N}\prod_{i=1}^{R}\left(\prod_{j=1}^{\overline{i}}\ln\left[x\right]\right)^{-1}dx\qquad(6)$$

证明　证明过程与“柯召素数”类似

X_i 的数码之和可表为 X_{i+1}， X_{i+1} 的平均值记为 $\overline{X}_{i+1}$，则

$$\overline{X}_{i+1}={}^{1}\frac{9\ln X_i}{2\ln10}+\frac{11}{4}\quad ,\quad \ln\overline{X}_{i+1}=\ln{}^{1}\frac{9\ln X_i}{2\ln10}+\frac{11}{4}={}^{1}\ln\ln X_i$$

X_i 同时是素数——广义柯召素数的条件，暂作非是等几条件，设素率系数记为 $^{\pm}C$，

X_i 、$\overline{X}_i$ 出现素数的概率记为 $P\left(X_i\right)$、$P\left(\overline{X}_i\right)$，全部 X_i 同时是素数——出现广义柯召素

数的概率，记为$P_{gk}\left(X_1\right)$，得

$$P_k\left(X_1\right)=^{\pm} C\prod_{i=1}^{R}P\left(X_i\right)=^{\pm} C\prod_{i=1}^{R}P\left(\overline{X}_i\right)=^{\pm} C\prod_{i=1}^{R}\frac{1}{\ln \overline{X}_i}$$

$$=^{\pm} B\prod_{i=1}^{R}\frac{1}{\ln\ln X_i}=\frac{^{\pm}B}{\ln X_1\ \ln\ln X_1\cdots\cdots\prod_{i=1}^{\overline{R-1}}\ln\left[X_1\right]\prod_{i=1}^{\overline{R}}\ln\left[X_1\right]}=^{\pm} B\prod_{i=1}^{R}\left(\prod_{j=1}^{\overline{i}}\ln\left[X_1\right]\right)^{-1}$$

$X_1\le N$或$x\le N$的广义柯召素数的实际个数，记为$\pi_{gk}\left(N\right)$，则

$$\pi_{gk}\left(X_1\right)=^{1}\Pi_{gk}\left(X_1\right)=^{1}\int^{N}P_{gk}\left(X_1\right)dX_1$$

$$=^{\pm} C\int^{N}P_{gk}\left(x\right)dx=^{\pm} C\int^{N}\prod_{i=1}^{R}\left(\prod_{j=1}^{\overline{i}}\ln\left[x\right]\right)^{-1}dx$$

证毕

9.2 卡米歇尔数

引理 1 n 是卡米歇尔 (Carmichael number) [?]P32 数的充要条件是 [8]P28

1 n 无平方因子

2 n 的每个因子 P 有 $p-1\big|n-1$

3 n 是奇数且至少三个因子

证明 略

下面将卡米歇尔数简称卡数（http://www.math.uwaterloo.ca/JIS/VOL5/Dubner/dubner6.pdf）

定理 3 当(6m+1)、(12m+1)、(18m+1)同时是素数，形如$\left(6m+1\right)\left(12m+1\right)\left(18m+1\right)$的数，是卡数。满足

$$\left(6m+1\right)\left(12m+1\right)\left(18m+1\right)\le N \qquad (7)$$

条件的卡数个数，记为$\pi_C\left(N\right)$，则

$$\pi_C\left(N\right)=^{1}\frac{9\sqrt[3]{N\div 6}}{2\ln^3\left(N\div 6\right)} \qquad (8)$$

证明 由$\left(7\right)$得

$$m \le {}^1\sqrt[3]{N \div 6^4}$$

因(6m+1)、(12m+1)、(18m+1)相互独立，同时是素数的频率及概率，记为 $p_C(m)$ 、$P_C(m)$，则

$$P_C(m) = P(6m+1)P(12m+1)P(18m+1)$$

$$= \frac{1}{\ln(6m+1)\ln(12m+1)\ln(18m+1)} = \frac{{}^1 1}{\ln^3(12m+1)} = \frac{{}^1 1}{\ln^3(12m)}$$

$$\pi_C(m) = \sum_{m=1}^{{}^1\sqrt[3]{N\div 6^4}} p_C(m) ={}^1 \int_1^{\sqrt[3]{N\div 6^4}} p_C(t)\,dt ={}^1 \int_1^{\sqrt[3]{N\div 6^4}} \frac{dt}{\ln^3(12m)} ={}^1 \frac{\sqrt[3]{N\div 6^4}}{\ln^3\left(6\sqrt[3]{N\div 6^4}\right)}$$

整理上式得本定理

9.3 亲和数

定义 3 m 、n 各自的因子之和记为 $\sigma(m)$ 、 $\sigma(n)$ ，当它们均等于两数之和

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n \qquad (9)$$

时，称 m 、n 为亲和数(Amicable number)
下面是一种类型的亲和数

定理 4 若 p_1 、 p_2 、 p_3 是形如下面表达的素数

$$\begin{cases} p_1 = (2^s+1)2^{e-s}-1 \\ p_2 = (2^s+1)2^e - 1 \qquad (2 \le s+1 \le e \le n) \\ p_3 = (2^s+1)^2 2^{2e-s} - 1 \end{cases} \qquad (10)$$

则 $2^e p_1 p_2$ 与 $2^e p_3$ 是一对亲和数，且这种亲和数仅有限个

证明 $2^e p_1 p_2$ 的各因子之和记为 $\sigma(2^e p_1 p_2)$ ，则

$$\sigma(2^e p_1 p_2) = \sum_{J=1}^{e} 2^J (p_1+1)(p_2+1) = (2^{e+1}-1)(2^s+1)2^{e-s}(2^s+1)2^e$$

$$= (2^{e+1}-1)(2^s+1)^2 2^{2e-s}$$

$$\sigma(2^e p_3) = \sum_{J=1}^{e} 2^J (p_3+1) = (2^{e+1}-1)(2^s+1)^2 2^{2e-s} = \sigma(2^e p_1 p_2)$$

$$2^e p_1 p_2 + 2^e p_3 = 2^e \left(p_1 p_2 + p_3 \right)$$

$$= 2^e \left\{ \left[\left(2^s + 1 \right) 2^{e-s} - 1 \right] \left[\left(2^s + 1 \right) 2^e - 1 \right] + \left(2^s + 1 \right)^2 2^{2e-s} - 1 \right\}$$

$$= 2^e \left\{ \left(2^s + 1 \right)^2 2^{2e-s} - \left(2^s + 1 \right) 2^{e-s} - \left(2^s + 1 \right) 2^e + 1 + \left(2^s + 1 \right)^2 2^{2e-s} - 1 \right\}$$

$$= 2^e \left(2^s + 1 \right) \left\{ \left(2^s + 1 \right) 2^{2e-s} - 2^{e-s} - 2^e + \left(2^s + 1 \right) 2^{2e-s} \right\}$$

$$= 2^e \left(2^s + 1 \right) \left\{ \left(2^s + 1 \right) 2^{2e-s} - 2^{e-s} \left(1 + 2^s \right) + \left(2^s + 1 \right) 2^{2e-s} \right\}$$

$$= 2^e \left(2^s + 1 \right)^2 \left(2^{2e-s} - 2^{e-s} + 2^{2e-s} \right) = 2^e \left(2^s + 1 \right)^2 \left(2^{2e+1-s} - 2^{e-s} \right)$$

$$= \left(2^{e+1} - 1 \right) \left(2^s + 1 \right)^2 2^{2e-s} = \sigma \left(2^e p_1 p_2 \right)$$

$$\sigma \left(2^e p_1 p_2 \right) = \sigma \left(2^e p_3 \right) = 2^e p_1 p_2 + 2^e p_3$$

$2^e p_1 p_2$ 与 $2^e p_3$ 满足亲和数的定义，是一对亲和数

将上面亲和数因子的表达式，用一般函数表达如下

$$\begin{cases} H_1\left(s,e\right) = \left(2^s+1\right)2^{e-s} - 1 \\ H_2\left(s,e\right) = \left(2^s+1\right)2^e - 1 \qquad \left(2 \le s+1 \le e \le n\right) \\ H_3\left(s,e\right) = \left(2^s+1\right)^2 2^{2e-s} - 1 \end{cases}$$

$H_i\left(s,e\right)$ 各自及同时出现素数的概率，记为 $P\left(H_i\left(s,e\right)\right)$，及 $P_A\left(s,e\right)$，在 $\left(2 \le s+1 \le e \le n\right)$ 时，出现亲和数的个数，记为 $\pi_A\left(s,e\right)$、$\Pi_A\left(s,e\right)$，虽 $H_i\left(s,e\right)$ 的素数率可能相互独立，仍暂作非等几问题处理，其相关系数记为 $^{\pm}C$，则

$$P_A\left(s,e\right) = {}^{\pm}C \prod_{i=1}^{3} P\left(H_i\left(s,e\right)\right) = {}^{\pm}C \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{\ln H_i\left(s,e\right)}$$

$$P_A\left(s,e\right) = \frac{^{\pm}C}{\ln\left[\left(2^s+1\right)2^{e-s}-1\right]} \frac{1}{\ln\left[\left(2^s+1\right)2^e-1\right]} \frac{1}{\ln\left[\left(2^s+1\right)^2 2^{2e-s}-1\right]}$$

$$P_A\left(s,e\right) = \frac{^{\pm}C}{\ln\left(2^e+2^{e-s}\right)} \frac{1}{\ln\left(2^{e+s}+2^e\right)} \frac{1}{\ln\left(2^{2e+s}+2^{2e}\right)} = \frac{^{\pm}C}{e\left(e+s\right)\left(2e+s\right)\ln^3 2}$$

$$\pi_A\left(n\right) =^{1} \int_2^n \int_1^{e-1} P_A\left(s,e\right) ds de =^{1} \int_2^n \int_1^{e-1} \frac{^{\pm}C ds de}{e\left(e+s\right)\left(2e+s\right)\ln^3 2}$$

上式被积函数是负三次幂的函数，积二次分后，变成负一次幂函数，当 n 取无穷大时得到的积分值，将是一个有限值，故此类亲和数仅有限个。推广了目前理论中，s=1 这类亲和

数[1] P14，并找到一对新的亲和数 s=7，e=8，即 $\left(2^8*257*33023,2^8*8520191\right)$

9.4 欧几里得素数定理

引理 2

$$T\left(p_n\right)=\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{{}^{\pm}C\left(p_n\right)}{\ln p_n}\qquad\left(\lim_{p_n\to\infty}{}^{\pm}C\left(p_n\right)={}^{\pm}C\right)\tag{11}$$

证明

$$\ln T\left(p_n\right)=\ln\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{p\le p_n}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{p\le p_n}\frac{{}^{1}1}{p}$$

$$=-^{1}\int^{p_n}\frac{P\left(t\right)dt}{t}=-^{1}\int^{p_n}\frac{dt}{t\ln t}=-^{1}\ln\ln p_n=\ln\frac{{}^{\pm}C\left(p_n\right)}{\ln p_n}$$

整理上式得本定理，证毕

引理 3 不大于 x 且不含小于 p_n 因子的自然数的个数，记为 $h\left(x,p_n\right)$，则

$$T\left(p_n\right)=\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{{}^{1}1}{2\ln p_n}\qquad\left(\lim_{p_n\to\infty}{}^{1}1=1\right)\tag{12}$$

$$h\left(x,p_n\right)=^{1}T\left(p_n\right)x=\frac{{}^{1}x}{2\ln p_n}\tag{13}$$

证明　不大于 x 的自然数的个数等于 x，不含小于 p_n 因子的自然数出现的概率几乎等于 $T\left(p_n\right)$，故下式成立

$$h\left(x,p_n\right)=^{1}T\left(p_n\right)x\tag{14}$$

由前一个引理中(12)式及素数定理得

$$T\left(p_n\right)=\prod_{p\le p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{{}^{\pm}C\left(p_n\right)}{\ln p_n}\qquad\left(\lim_{p_n\to\infty}{}^{\pm}C\left(p_n\right)={}^{\pm}C\right)\tag{15}$$

$$\pi\left(x\right)=\frac{{}^{1}x}{\ln x}=h\left(x,p_n=^{1}\sqrt{x}\right)=^{1}T\left(\sqrt{x}\right)x=\frac{{}^{\pm}C\left(p_n\right)x}{\ln\sqrt{x}}=\frac{{}^{\pm}2C\left(p_n\right)x}{\ln x}$$

$${}^{\pm}2C\left(p_n\right)=^{1}1$$

上式代入(15)式，再代入(14)式得(13)式，定理获证

引理 4 在$\left(Q,Q+\Delta Q\right)$内，不含小于$p_n$因子的自然数中，出现素数的概率记为$P\left(p_n,Q\right)$， 则

$$P\left(p_n,Q\right)=\frac{2\ln p_n}{\ln Q} \tag{16}$$

证明 在$\left(Q,Q+\Delta Q\right)$内，不含小于$p_n$因子的自然数的个数，记为$\Delta m\left(p_n\right)$，素数个数记为$\Delta\pi\left(Q\right)$，由上面引理得

$$\Delta m\left(p_n\right)=^1 T\left(p_n\right)\Delta Q$$

$$\Delta\pi\left(Q\right)=^1 P\left(Q\right)\Delta Q=^1 \frac{\Delta Q}{\ln Q}$$

$$P\left(p_n,Q\right)=^1 \frac{\Delta\pi\left(Q\right)}{\Delta m\left(p_n\right)}=^1 \frac{\Delta Q}{\ln Q}\div\left(T\left(p_n\right)\Delta Q\right)=^1 \frac{\Delta Q}{\ln Q}\div\frac{\Delta Q}{2\ln p_n}=^1 \frac{2\ln p_n}{\ln Q}$$

得$\left(14\right)$式

9. 4.1 前 n 个素数之和

引理 5 自然数中，第 t 个素数记为p_t，则

$$p_t=^1 t\ln p_t=^1 t\ln t \tag{17}$$

证明 由素数定理

$$t=\pi\left(p_t\right)=^1 \frac{p_t}{\ln p_t}$$

上式变形得$\left(17\right)$式，证毕

定理 5 将前 t 个素数之和记为$\sum_{J\le t}p_J$，则

（ http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?page=1&Topic_ID=2034&forum_id=7）

$$\sum_{J\le t}p_J=^1 \frac{t^2}{2}\ln\frac{t}{e^2} \tag{18}$$

证明 由$\left(17\right)$式得

$$\prod_{J\le t} p_J =^1 \sum_{J=1}^{t} J\ln J =^1 \int^t x\ln x dx =^1 \int^t x dx\left(\ln x - 1\right)$$

$$=^1\left[t^2\left(\ln t - 1\right) - \int^t x\left(\ln x - 1\right)dx\right] =^1\left[t^2\left(\ln t - 1\right) - \int^t x\ln x dx + \int^t x dx\right]$$

$$=^1\left[t^2\left(\ln t - 1\right) - \int^t x\ln x dx + \frac{t^2}{2}\right] = \frac{^1t^2\ln t}{2} - \frac{t^2}{4} = \frac{^1t^2}{2}\ln\frac{t}{e^2}$$

得(18)式，证毕

9. 4.2 前 n 个素数之积

定理 6 将前 t 个素数之积记为$\prod_{J\le t} p_J$，则

$$\prod_{J\le t} p_J =^1 \exp\left(t\left(\ln t\ln t - 1\right)\right) =^1 \exp\left(t\left(\ln p_t - 1\right)\right) \quad (19)$$

证明 由(17)式得

$$\ln\prod_{J\le t} p_J =^1 \sum_{J=1}^{t} \ln\left(J\ln J\right) =^1 \int^t \ln\left(x\ln x\right)dx =^1 \int^t\left(\ln x + \ln\ln x\right)dx$$

$$=^1 \quad x\left(\ln x + \ln\ln x - 1\right)\Big|^{x=t} =^1 t\left(\ln t\ln t - 1\right) =^1 t\left(\ln p_t - 1\right)$$

由上式变形得(19)式。可提高(17)式及(19)式的精度，此略，证毕

数据如下

$$\ln\prod_{J\le 100} p_J = 505.816 \quad , \quad \exp\left(t\left(\ln t\ln t - 1\right)\right)\Big|^{t=100} = 513.235$$

谢谢由网友天山草老师提供此数据，见数学中国网址：
http://www.mathchina.com/cgi-bin/topic.cgi?forum=5&topic=4221&start=48&show=25

定义 4 令

$$e\left(n\right) = p_1 p_2 \cdots\cdots p_n - 1 \quad (20)$$

$$E(n)=p_1p_2\cdots\cdots p_n+1 \tag{21}$$

将$e(n)$及$E(n)$称为欧几里得（Euclidean，公元前330年～前275年的古希腊数学家）数，为纪念他用此数首次证明了素数无穷多， *当它是素数时，称它为欧几里得素数(primorial prime)

定理7

$$e(t)=^{1}E(t)=^{1}\ p_1p_2\cdots\cdots p_t=^{1}\ \exp\left(t\left(\ln t\ln t-1\right)\right)=^{1}\ \exp\left(t\left(\ln p_t-1\right)\right) \tag{22}$$

证明 由上面$e(n)$、$E(n)$的定义

$$e(n)=^{1}E(n)=^{1}\ p_1p_2\cdots\cdots p_n=^{1}\prod_{t\le n}p_t$$

及(19)式得本定理结果

定理8 $n\le N$时，在欧几里得数$e(n)$或$E(n)$中，出现的素数个数，记为$\pi\left(e(N)\right)$或$\pi\left(E(N)\right)$，当欧几里得数$e(n)$或$E(n)$是合数时，其最小因子记为$S(n)$，则[] P23

$$\pi\left(e(N)\right)=^{\pm}C_e\ln\frac{p_N}{\ln p_N} \tag{23}$$

$$\pi\left(E(N)\right)=^{\pm}C_E\ln\frac{p_N}{\ln p_N} \tag{24}$$

$$\ln S(t)=^{1}e\ln p_t\quad,\qquad S(N)=^{1}\ p_N^{e} \tag{25}$$

其中 $^{\pm}C_e$、$^{\pm}C_E$是欧几里得数$e(n)$或$E(n)$的系数

证明 由素数定理

$$\pi\left(p_N\right)=N=^{1}\ \frac{p_N}{\ln p_N}$$

设$e(t)$或$E(t)$是合数时，最小因子记为$^{1}S(t)$，将它与p_t的关系表达如下

$$S(t)=^{1}p_t^{g(p_t)}\quad,\qquad \ln S(t)=^{1}g\left(p_t\right)\ln p_t \tag{26}$$

实际数据表明，$g\left(p_t\right)$是关于p_t变化较小的函数，将$e(t)$或$E(t)$暂作非等几问题处理，设素率系数为$^{\pm}C$，由此可将$e(t)$或$E(t)$的素数率$P\left(S(t),e(t)\right)$、$P\left(S(t),E(t)\right)$等表达如下，并引用(22)式

$$P\left(S(t),e(t)\right)=^{1}P\left(S(t),E(t)\right)$$

$$=^{\pm}C\frac{2\ln S(t)}{\ln e(t)}=^{\pm}C\frac{2g\left(p_t\right)\ln p_t}{t\left(\ln p_t-1\right)}=^{\pm}C\frac{2g\left(p_t\right)}{t}$$

$$\pi\left(e(N)\right)=^{1}\pi\left(E(N)\right)=\int^{N}P\left(S(t),e(t)\right)dt=\int^{N}{}^{\pm}C\frac{2g\left(p_t\right)}{t}dt$$

$$\pi\left(e(N)\right)=^{\pm}C2g\left(p_N\right)\int^{N}\frac{dt}{t}=^{\pm}C2g\left(p_N\right)\ln N=^{\pm}C2g\left(p_N\right)\ln\frac{p_N}{\ln p_N}$$

由于${}^{1}S(t)$是$e(t)$或$E(t)$最小因子的理论值，下面计算${}^{1}S(t)$的值

$$p_t\le^{1}S(t)\le\sqrt{e(t)}$$

p_i在$\left(p_t,{}^{1}S(t)\right)$内逐个取素数，$p_i$整除$e(t)$或$E(t)$的概率记为$P\left(p_i\left|e(t)\right.\right)$、$P\left(p_i\left|E(t)\right.\right)$，则

$$P\left(p_i\left|e(t)\right.\right)=^{1}P\left(p_i\left|E(t)\right.\right)=^{1}\frac{1}{p_i}$$

当p_i的值取到${}^{1}S(t)$附近时，p_i整除$e(t)$或$E(t)$的概率累计值就等于1——由此得到${}^{1}S(t)$的平均值

$$\sum_{p_t\le p_i\le^{1}S(t)}P\left(p_i\left|e(t)\right.\right)=^{1}\sum_{p_t\le p_i\le^{1}S(t)}P\left(p_i\left|E(t)\right.\right)=\sum_{p_t\le p_i\le^{1}S(t)}\frac{{}^{1}1}{p_i}$$

$$=\int_{p_t}^{{}^{1}S(t)}\frac{{}^{1}P(x)}{x}dx=^{1}\int_{p_t}^{{}^{1}S(t)}\frac{dx}{x\ln x}={}^{1}\ln\ln x\Big|_{x=p_t}^{x={}^{1}S(t)}=^{1}\ln\frac{\ln S(t)}{\ln p_t}=1$$

$$\ln S(t)=^{1}e\ln p_t\quad,\qquad S(N)=^{1}p_N^{e}$$

$$g\left(p_N\right)=^{1}\frac{\ln S(N)}{\ln p_N}=^{1}e$$

$$\pi\left(e(N)\right)=^{\pm}C2g\left(p_N\right)\ln\frac{p_N}{\ln p_N}=^{\pm}C2e\ln\frac{p_N}{\ln p_N}=^{\pm}C_e\ln\frac{p_N}{\ln p_N}$$

同理

$$\pi\left(E(N)\right)=^{\pm}C_E\ln\frac{p_N}{\ln p_N}$$

定理获证，数据见下表，从数据表中可以看出，欧几里得素数波动较大，系数 $^{\pm}C_e$，$^{\pm}C_E$ 缓慢增大，存在系数误差，有待改进。

表 9.3 欧几里得素数表

π_e,π_E	$p_e(N)$	$\Pi(e(N))_0$	$^{\pm}C_e$	$p_E(N)$	$\Pi(E(N))_0$	$^{\pm}C_E$
1	2	1．060	1．060	3	1．005	0．995
2	3	1．005	3．014	5	1．134	1．764
3	5	1．134	2．647	11	1．523	1．969
4	7	1．280	3．125	41	2．402	1．666
5	11	1．523	3．282	89	2．987	1．674
6	31	2．200	2．727	317	4．008	1．497
7	379	4．156	1．684	357	4．107	1．705
8	1019	4．991	1．603	991	4．967	1．611
9	1021	4．993	1．803	1873	5．516	1．632
10	2657	5．820	1.718	2053	5．595	1．787
11	3229	5．991	1.836	2377	5．723	1．922
12	4547	6．291	1.907	4093	6．199	1．936
13	4787	6．337	2．052	4297	6．242	2．083
14	11549	7．119	1．967	4583	6．298	2．223
15	13649	7．268	2．064	6569	6．616	2．267
16	18523	7．542	2．122	13033	7．227	2．214
17	23801	7。767	2．189	15877	7．403	2．296
18	24029	7．776	2．315			
19	42209	8．285	2．293			
20	145823	9．414	2．124			
21	366439	10．26	2．047			
22	392113	10．32	2．131			

其中 $\pi(e(N))=\pi_e=\pi(E(N))=\pi_E=\pi_e\pi_E$

$$\Pi(e(N))_0=\ln\frac{p_e(N)}{\ln p_e(N)}\quad,\qquad \Pi(E(N))_0=\ln\frac{p_E(N)}{\ln p_E(N)}$$

$$^{\pm}C_e = \frac{\pi\left(e\left(N\right)\right)}{\Pi\left(e\left(N\right)\right)_0} \qquad , \qquad ^{\pm}C_E = \frac{\pi\left(E\left(N\right)\right)}{\Pi\left(E\left(N\right)\right)_0}$$

[网上搜索“福琼猜想”

或 http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=PrimorialPrime

伪素数(pseudo prime numbers) 寻找欧几里得素数

9. 4.3 相邻素数平均间距

定理 9

$$\overline{p_{n+1}-p_n} =^{1} \ln\left(p_n + 0.5\ln p_n\right)$$

证明

$$1 = \pi\left(p_{n+1}\right) - \pi\left(p_n\right) =^{1} \Pi\left(\overline{p_{n+1}}\right) - \Pi\left(\overline{p_n}\right)$$

$$=^{1} \int_{\overline{p_n}}^{\overline{p_{n+1}}} P\left(t\right)dt =^{1} \int_{\overline{p_n}}^{\overline{p_{n+1}}} \frac{dt}{\ln t} =^{1} \left(\overline{p_{n+1}} - \overline{p_n}\right)\ln^{-1}\frac{\overline{p_{n+1}}+\overline{p_n}}{2}$$

$$=^{1} \overline{p_{n+1}-p_n}\ln^{-1}\left(\overline{p_n} + \frac{\overline{p_{n+1}}-\overline{p_n}}{2}\right) =^{1} \frac{\overline{p_{n+1}-p_n}}{\ln^{-1}\left(\overline{p_n}+0.5\ln\overline{p_n}\right)}$$

整理上式定理获证

9. 5　偶数表为两个素数之差

定理 10 偶数 $N = 2n$ 表为不大于 N 的两素数 p_2、 p_1 之差

$$N = p_2 - p_1 = 2n \qquad \left(p_1 \le N\ , p_1 \le p_2\right) \tag{27}$$

的表法个数，记为 $u_{21}\left(N\right)$， $N = 2n \le x$ 的 $u_{21}\left(N\right)$ 之和记为 $\pi_{21}\left(x\right)$，则

$$\pi_{21}\left(x\right) = \sum_{n=1}^{0.5x} u_{21}\left(2n\right) \tag{28}$$

$$u_{21}\left(N\right) = \frac{^{1}N}{\ln^2 N} \tag{29}$$

$$\pi_{21}\left(x\right) = \frac{^{1}x^2}{4\ln^2 x} \tag{30}$$

证明　因

$$p_2 = N + p_1$$

$$u_{21}(N) = \sum_{p_1 \le N} \left[\pi_{21}(N+p_1) - \pi_{21}(N+p_1-1) \right]$$

$$= \int_1^N P(N+t)\,P(t)\,dt = \int_1^N \frac{1}{\ln(N+t)} \frac{1}{\ln t}\,dt = {}^1 \frac{1}{\ln(N+0.5N)} \frac{N}{\ln 0.5N}$$

对上式进行近似积分得 $u_{21}(N)$ 表达式 (29)

同理，由 (28) 及 (29) 得

$$\pi_{21}(x) = \sum_{n=1}^{0.5x} u_{21}(2n) = \sum_{n=1}^{0.5x} {}^1\frac{2n}{\ln^2 2n} = \int_1^{0.5x} {}^1\frac{2tdt}{\ln^2 2t} = {}^1\frac{t^2}{\ln^2 2t}\Bigg|^{t=0.5x} = {}^1\frac{x^2}{4\ln^2 x}$$

得 (30) 式

9. 6　含 k 个因子的自然数个数

9. 6.1 含两个因子的自然数个数

引理 6

$$\int \frac{du}{(a+bu)u} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+bu}{u} + c \qquad (31)$$

证明　略

引理 7

$$F(x) = \int^x \frac{t^m dt}{\sum_{J=0}^{2} c_J \ln^J t} = \frac{x^{m+1}}{\sum_{J=0}^{2} a_J \ln^J t} + \int^x \frac{t^m \sum_{J=0}^{1} D(J)\ln^J t}{\sum_{J=0}^{2} c_J \ln^J t \left(\sum_{J=0}^{2} a_J \ln^J t \right)^2} dt \qquad (32)$$

$$a_2 = c_2(m+1), \quad a_1 = c_1(m+1) - 2c_2, \quad a_0 = c_0(m+1) - c_1 - \frac{2c_2}{m+1}$$

$$D(1) = \frac{8c_2^2}{m+1}, \quad D(0) = \left(c_1 + \frac{2c_2}{m+1} \right)^2 - 4c_0 c_2$$

证明　略[6] P121，即第 5 章 (34) ：(39) 式

定理 11 小于 x 且含两个因子的自然数个数，记为$m\left(2,x\right)$、$M\left(2,x\right)$，则

$$m\left(2,x\right)=^{1}\frac{x\ln\ln x}{\ln x-1}-\frac{8x}{\ln^{2}x-\ln x} \tag{33}$$

证明　将两因子表为p_1、p_2，则

$$p_1 p_2\le x\qquad\left(2\le p_1\le\sqrt{x}\ ,\ p_1\le p_2\le\frac{x}{p_1}\right)$$

$$m\left(2,x\right)=\sum_{2\le p_1\le\sqrt{x}}\ \sum_{p_1\le p_2\le\frac{x}{p_1}}1=\sum_{2\le p_1\le\sqrt{x}}\left[\pi\left(\frac{x}{p_1}\right)-\pi\left(p_1\right)\right]$$

$$=^{1}M\left(2,x\right)=^{1}\sum_{2\le p_1\le\sqrt{x}}\left[\Pi\left(\frac{x}{p_1}\right)-\Pi\left(p_1\right)\right]=^{1}\int^{\sqrt{x}}\left[\Pi\left(\frac{x}{t}\right)-\Pi\left(t\right)\right]P\left(t\right)dt$$

$$=^{1}\int^{\sqrt{x}}\left[\frac{x}{t\left(\ln\frac{x}{t}-1\right)}-\frac{t}{\ln t-1}\right]\frac{dt}{\ln t}=^{1}\int^{\sqrt{x}}\frac{xd\ln t}{\left(\ln\frac{x}{t}-1\right)\ln t}-\int^{\sqrt{x}}\frac{tdt}{\left(\ln t-1\right)\ln t}$$

$$=-^{1}\frac{x}{\ln x-1}\ln\frac{\ln\frac{x}{t}-1}{\ln t}\Bigg|^{t=\sqrt{x}}-\frac{t^{2}}{2\ln^{2}t-4\ln t}\Bigg|^{t=\sqrt{x}}$$

$$=^{1}\frac{x}{\ln x-1}\ln\frac{\ln\frac{x}{c}-1}{\ln c}-\frac{x}{2\ln^{2}\sqrt{x}-4\ln\sqrt{x}}=^{1}\frac{x\ln\ln x}{\ln x-1}-\frac{8x}{\ln^{2}x-\ln x}$$

得$m\left(2,x\right)$表达式，证毕

以此类推，可计算含 K 个因子的自然数个数，此略

9.7　最小素数问题

定理 12　等差数列$kx+a$中，当 x=1，2，3，………，时，出现的最小素数记为$p_{\min}$，则

$$p_{\min}=mk+a=^{1}\ln^{2}\left[\ln\left(k\ln k\right)+a\right] \tag{34}$$

证明　等差数列 kx+a 中出现的概率记为 P（kx+a），则

$$\frac{^{1}1}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\le\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)=\frac{^{1}1}{\ln\left(\mathrm{kx+a}\right)}\le\frac{^{1}1}{\ln\left(\mathrm{kx+a}\right)}$$

由于最小素数是$p_{\min}$，前$m-1$个等差数列 kx+a 中的数是合数，前 m 次取值时出现合数的

个数，记为η_m，出现合数的概率为$1\text{-}\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)$，当 m 足够大时，用重对数定理进行近似计算得

$$\left|\eta_m - mp\right| =\leq \sqrt{2mp(1-p)\ln\ln m}$$

$$\left|\eta_m - m\left(1\text{-}\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)\right)\right| \leq \sqrt{2m\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)\left[1-\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)\right]\ln\ln m}$$

$$\eta_m = m\left(1\text{-}\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)\right) + \sqrt{2m\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)\left[1-\mathrm{P}\left(\mathrm{kx+a}\right)\right]\ln\ln m}$$

$$= m\left(1\text{-}\frac{^{1}1}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\right) + \sqrt{\frac{^{1}2m}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\left[1-\frac{1}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\right]\ln\ln m} = m-1$$

$$\frac{^{1}m}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)} = 1 + \sqrt{\frac{2m}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\ln\ln m}$$

$$m =^{1} \ln\left(\mathrm{km+a}\right)\left\{1 + \sqrt{\frac{2m}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\ln\ln m}\right\}$$

$$=^{1} \ln\left(\mathrm{km+a}\right)\left\{1 + \sqrt{\frac{2\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}{\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\ln\ln\ln\left(\mathrm{km+a}\right)}\right\}$$

$$=^{1} \ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)\left\{1 + \sqrt{\frac{2\ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)}{\ln\left(\mathrm{k+a}\right)}\ln\ln\ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)}\right\}$$

$$=^{1} \ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)\left\{1 + \sqrt{2\ln\ln\ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)}\right\}$$

$$\eta_m =^{1} \ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)\sqrt{2\ln\ln\ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)} =^{1} \ln\left(\mathrm{klnk+a}\right)\sqrt{2\ln\ln\ln \mathrm{k}}$$

N 附近的相邻素数的最大间距记为$\overset{\uparrow}{_A}D\left(N,2\right)_2$，则

$$\overset{\uparrow}{_A}D\left(N,2\right)_2 =^{1} \left(\ln N\right)\ln\frac{2N}{\ln^2 N} - \frac{1}{2} =^{1} \ln^2 N$$

在等差数列$kx+a$中，m 附近的相邻素数的最大间距记为$\overset{\uparrow}{_A}D\left(km+a,2\right)_2$，可对应地罗列如下

$$\overset{\uparrow}{_A}D\left(km+a,2\right)_2 =^{1} \ln^2\left(km+a\right)$$

如果我们又以η_m为起点，重新计算最小素数$p_{\min}$，它将不超过$\eta_m + \overset{\uparrow}{_A}D\left(k\eta_m + a,2\right)_2$，则

$$p_{\min} = \eta_m + \overset{\uparrow}{_A}D\left(k\eta_m + a,2\right)_2$$

$$=^{1} \ln(\mathrm{klnk+a})\sqrt{2\ln\ln\ln(\mathrm{klnk+a})}+\ln^{2}(\ln(k\ln k)+a)$$

$$p_{\min}=^{1} \ln^{2}\left[\ln(k\ln k)+a\right]$$

显然，η_m这个起点值是可以不计的，得(34)，证毕

9.8 连续自然数素数

定义 5　素数的数码由连续自然数构成，称为连续自然数素数

此定义由东陆论坛网友“尚九天”在下面网址给出的帖子引导出，

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=24126&Forum_ID=7

如：23、67、89、4567、23456789

9．9 超级素数

这个问题可以在下面网址或直接在网上搜索 “超级素数”，获得相关信息

http://www.programfan.com/club/showtxt.asp?id=61932

http://www.9wan9.com/Article/exe/FoxPro/200610/20061027212941.html

超级素数分成两种：左超级素数及右超级素数，对应网上“超级素数”及“逆超级素数”，定义并计算如下

定义 6 当一个 n 位素数 p 的前 1 位，前 2 位, . . . , 前 n-1 位数均为素数时，称它是一个 n 位左超级素数

例如，7331 是个 4 位左超级素数，因为 7，73，733，7331 均为素数

引理 8 [6] P94

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right\}=\gamma=^{\pm} 0.5772156649 \text{（尤拉常数）} \qquad (35)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}=^{\pm} \gamma=^{\pm} 0.5772156649 \text{（尤拉常数）} \qquad (36)$$

定理 13　n 位十进制左超级素数出现的平均概率及个数，记为$\overline{P}(h_1(n))$、$m(h_1(n))$，$n\le N$位数的左超级素数个数记为$\pi(h_1(N))$，则

$$\overline{P}(h_1(x))=\frac{^{1} e^{n}}{\sqrt{2\pi n}\, n^{n}\ln^{n}10}\exp\left(\frac{9-\ln 10}{9\ln 10}(\ln n+\gamma)\right)=\frac{^{\pm} e^{n}\exp(0.3(\ln n+\gamma))}{\sqrt{2\pi n}\, n^{n}\ln^{n}10} \qquad (37)$$

$$m\left(h_1\left(n\right)\right)=\frac{{}^{1}0.9*10^n e^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n \ln^n 10}\exp\left(\frac{9-\ln 10}{9\ln 10}\left(\ln n+\gamma\right)\right)=\frac{{}^{\pm}0.9Ce^n n^{0.3}10^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n\ln^n 10} \tag{38}$$

$$\pi\left(h_1\left(N\right)\right)=\sum_{n=1}^{N}m\left(h_1\left(n\right)\right)<^{\pm} c \tag{39}$$

即自然数中左超级素数仅有限个

证明　令 x 是一个十进制的 n 位自然数，其 n 个数码表达为 $a_1,a_2,\cdots a_n$,，前 k 位数表达为 x_k，则

$$10^{n-1}\le x=a_1a_2\cdots a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i10^{i-1}=x_n\le 10^n \qquad \left(1\le a_1\le 9\right) \tag{40}$$

$$10^{k-1}\le x_k=a_1a_2\cdots a_k=\sum_{i=1}^{k}a_i10^{i-1}\le 10^k-1 \qquad \begin{pmatrix}1\le a_1\le 9\\ 1\le k\le n\end{pmatrix} \tag{41}$$

n 位左超级素数的条件，记为 $h_1\left(n\right)$， $h_1\left(n\right)$ 及 x_k 的素数概率及平均值记为 $P\left(h_1\left(n\right)\right)$、$P\left(x_k\right)$、$\overline{P}\left(h_1\left(n\right)\right)$、$\overline{P}\left(x_k\right)$、因 x_k 是任意取值的自然数，属于等几素数问题，其素数概率 $P\left(x_k\right)$ 几乎正比于同等大小的自然数的素数率，且相互独立，则

$$P\left(h_1\left(x\right)\right)\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}P\left(x_k\right)$$

$$\overline{P}\left(h_1\left(x\right)\right)\overset{1}{=}\overline{\prod_{k=1}^{n}P\left(x_k\right)}\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\overline{P}\left(x_k\right)\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\overline{\frac{1}{\ln x_k}}\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k-10^{k-1}}\int_{10^{k-1}}^{10^k}\frac{dt}{\ln t}$$

$$\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\frac{10^{-k}}{0.9}\left(\frac{10^k}{\ln 10^k-1}-\frac{10^{k-1}}{\ln 10^{k-1}-1}\right)\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\frac{10^{-k}}{0.9}\left(\frac{0.9*10^k}{\ln 10^k-1}+\frac{10^{k-1}}{\ln 10^k-1}-\frac{10^{k-1}}{\ln 10^{k-1}-1}\right)$$

$$\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\frac{10^{-k}}{0.9}\left(\frac{0.9*10^k}{\ln 10^k-1}-\frac{10^{k-1}\ln 10}{\left(\ln 10^k-1\right)^2}\right)\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\ln 10^k-1}-\frac{\ln 10}{9\left(\ln 10^k\right)^2}\right)$$

$$\overset{1}{=}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln 10^k}\left(1+\frac{9-\ln 10}{9\left(\ln 10^k\right)}\right)\overset{\pm}{=}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln 10}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{9-\ln 10}{9k\ln 10}\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}1}{n!\ln^n 10}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{9-\ln 10}{9k\ln 10}\right)\right)=\frac{{}^{\pm}1}{n!\ln^n 10}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{9-\ln 10}{9k\ln 10}\right)$$

由阶乘引理：第 3 章$\left(5\right)$式及$\left(36\right)$式代入上式得

$$\overline{P}\left(h_1(x)\right)=\frac{{}^1 e^n}{\sqrt{2\pi n}\; n^n \ln^n 10}\exp\left(\frac{9-\ln 10}{9\ln 10}\left(\ln n+\gamma\right)\right)=\frac{{}^{\pm} e^n \exp\left(0.3\left(\ln n+\gamma\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\; n^n \ln^n 10}$$

整理上式得(37)式。

由上式计算n位数的左超级素数个数$m\left(h_1(n)\right)$如下

$$m\left(h_1(n)\right)=^1 M\left(h_1(n)\right)=^1 \overline{P}\left(h_1(n)\right)\left(10^n-10^{n-1}\right)=^1 0.9*10^n\,\overline{P}\left(h_1(n)\right)$$

$$=\frac{{}^1 0.9*10^n e^n}{\sqrt{2\pi n}\; n^n \ln^n 10}\exp\left(\frac{9-\ln 10}{9\ln 10}\left(\ln n+\gamma\right)\right)=\frac{{}^{\pm}0.9Ce^n n^{0.3}10^n}{\sqrt{2\pi n}\; n^n \ln^n 10}$$

得(38)式。计算$n\le N$位数的左超级素数个数$\pi\left(h_1(N)\right)$如下

$$\pi\left(h_1(N)\right)=\sum_{n=1}^{N} m\left(h_1(n)\right)=\int^N m\left(h_1(t)\right)dt=\int^N m\left(h_1(t)\right)dt=\int^N \frac{{}^{\pm}0.9Ce^n n^{0.3}10^n}{\sqrt{2\pi n}\; n^n \ln^n 10}dt$$

$$=\frac{{}^{\pm}0.9C}{\sqrt{2\pi}}\int_1^N \frac{1}{n^{0.2}}\left(\frac{e10}{n\ln 10}\right)^n dt<\frac{{}^{\pm}0.9C}{\sqrt{2\pi}}\int_1^N \frac{dt}{n^2}=\frac{{}^{\pm}0.9C}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{N}\right)<\frac{{}^{\pm}0.9C}{\sqrt{2\pi}}<^{\pm} c$$

得(39)式

定义 7　当一个 n 位素数 p 依次掉前 1 位，前 2 位，. . . ，前 n-1 位数码仍均为素数时，且数 p 的各位数码均不为零，称该素数 p 为逆向超级素数

例如，617，17，7 都是素数，因此 617 是逆向超级素数，尽管 503，03，3 都是素数，但它不是逆向超级素数，因为它包含有零。

定理 14　自然数中右超级素数仅有限个

证明　与让证明自然数中左超级素数仅有限个的方法相似，此略

9. 10　希尔伯特第八问题

希尔伯特第八问题包括 三个问题：孪生素数猜想、哥德巴赫猜想、黎曼猜测为真，分别在以下三处得到部分解决

第四章的 3.1.4 孪生素数的个数

第七章　 哥德巴赫猜想

第三章 3.1.7 黎曼猜测为真

第 10 章
自然数的性质

10. 1　最多不同因子的个数

定理 1　不大于 N 的自然数中，数中不同因子最多时的不同因子个数为 $u(N)$ 、$U(N)$，则

$$\mathrm{u}(N) =^{1} \mathrm{U}(N) =^{1} \ln N \qquad (1)$$

证明　显然，以下面形式构成 N 的因子时，其不同因子的个数 $u(N)$ 、$U(N)$ 最多

$$N =^{1} p_1 \quad p_2 \cdots\cdots p_{u(N)} \le N \qquad (2)$$

则

$$\ln N =^{1} \sum_{J=1}^{u(N)} \ln p_J =^{1} \int^{u(N)} P(t) \ln t dt =^{1} \int^{u(N)} \frac{1}{\ln t} \ln t dt =^{1} u(N)$$

得 (1)，证毕

10. 2　仅一个数码不同的素数

引理 1　$(10^{t-1}, 10^{t})$ 内自然数的平均素数率记为 $\overline{\rho}(10^{t-1}, 10^{t})$ 、$P(10^{t-1}, 10^{t})$，则

$$\overline{\rho}(10^{t-1}, 10^{t}) = \left[\pi(10^{t}) - \pi(10^{t-1})\right] \div (10^{t} - 10^{t-1}) \qquad (3)$$

$$P(10^{t-1}, 10^{t}) =^{1} \frac{1}{(t-0.5)\ln 10 - 1} - \frac{5.5\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10 - 1\right]^{2}} + \frac{(0.5\ln 10)^{2}}{\left[(t-0.5)\ln 10 - 1\right]^{3}} \qquad (4)$$

证明　表达式(3)是平均素数频率的定义，则

$$P\left(10^{t-1},10^{t}\right)=^{1}\overline{\rho}\left(10^{t-1},10^{t}\right)=^{1}\left[\pi\left(10^{t}\right)-\pi\left(10^{t-1}\right)\right]\div\left(10^{t}-10^{t-1}\right)$$

$$=\left[\frac{^{1}10^{t}}{\ln 10^{t}-1}-\frac{10^{t-1}}{\ln 10^{t-1}-1}\right]\frac{1}{10^{t}-10^{t-1}}=^{1}\left[\frac{10^{t}}{t\ln 10-1}-\frac{10^{t-1}}{(t-1)\ln 10-1}\right]\frac{10}{9\cdot 10^{t}}$$

$$=\left[\frac{^{1}10}{(t-0.5)\ln 10-1+0.5\ln 10}-\frac{1}{(t-0.5)\ln 10-1-0.5\ln 10}\right]\frac{1}{9}$$

$$=\frac{^{1}10}{(t-0.5)\ln 10-1}\left[\left(1-\frac{0.5\ln 10}{(t-0.5)\ln 10-1}\right)-\left(1+\frac{0.5\ln 10}{(t-0.5)\ln 10-1}\right)\right]\frac{1}{9}$$

整理上式得(4)

定理 2　仅一位数码不同的 t 位数记为$u(t)$

$$10^{t-1}\le u(t)=\underbrace{a\cdots a}b\underbrace{a\cdots a}_{t-1\text{个}a}\le 10^{t}-1\quad(3\le t)\tag{5}$$

$u(t)$中的素数个数记为$m(1,t)$、$M(1,t)$，将$t\le N$的$m(1,t)$、$M(1,t)$之和记为$\pi(1,N)$、$\Pi(1,N)$，即

$$\pi(1,N)=\sum_{t=1}^{N}m(1,t)=^{1}\Pi(1,N)=\int^{N}M(1,t)\,dt\tag{6}$$

则

$$M(1,N)=^{\pm}\sqrt{180\left[\ln\ln\left(90\log_{10}N\right)\right]\div\ln 10}=^{\pm}8.84\sqrt{\ln\ln\left(90\log_{10}N\right)}\tag{7}$$

$$M(1,t)=\frac{^{1}_{m}90}{\ln 10}\left\{1+\frac{9-\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]}\right\}+^{\pm}2.449\quad(3\le t)\tag{8}$$

$$\pi(1,N)=\frac{^{1}_{\pi}90}{\ln 10}\left\{(N-3)+\frac{9-\ln 10}{9\ln 10}\ln\frac{(N-0.5)\ln 10-1}{(3-0.5)\ln 10-1}\right\}+2.449(N-3)\tag{9}$$

证明　下面仅进行粗略的近似计算，实际数据支持本问题是均分素数问题。如要提高精度，需使用更接近实际情况的模型，进行精确的近似计算，此略。因$u(t)$几乎平均地分布在$\left(10^{t-1},10^{t}\right)$内的自然数中，其平均素数率记为$\overline{P}\left(u(t)\right)$，应正比于对应自然数的平均素数率，由$(4)$式得

$$\overline{P}\left(u(t)\right) =_m^1 P\left(10^{t-1},10^t\right) =_m^1 \left\{\frac{1}{(t-0.5)\ln 10-1} - \frac{{}^1 5.5\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]^2}\right\} \quad (10)$$

$u(t)$ 的取值个数记为 $S(1,t)$，注意 $u(t)$ 中仅有两种数码，且一种数码仅有一个，另一种数码有 $t-1$ 个

（1）、当 $t=3$ 时，左端位的一种数数可取 1 到 9，非左端位的另一种数码可取 0 到 9，且 b 可位于 t 位数的任何位置，共 t 种选择，显然

$$S(1,3)=9\cdot 10\cdot 3=270$$

……………………

（2）、同理，左端位的一种数数可取 1 到 9，非左端位的另一种数码可取 0 到 9，且 b 可位于 t 位数的任何位置，共 t 种选择，显然

$$S(1,t)=9\cdot 10\cdot t=90t \quad (3\le t) \quad (11)$$

由 (10)、(11) 式，得

$$m(1,t) =^1 M(1,t) =^1 P\left(u(t)\right) S(1,t)$$

$$M(1,t) =_m^1 \left\{\frac{1}{(t-0.5)\ln 10-1} - \frac{{}^1 5.5\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]^2}\right\} 90t$$

$$=_m^1 90\left\{\frac{1}{(t-0.5)\ln 10-1} - \frac{{}^1 5.5\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]^2}\right\} \frac{(t-0.5)\ln 10-1+0.5\ln 10+1}{\ln 10}$$

$$=\frac{{}_m^1 90}{\ln 10}\left\{1-\frac{{}^1 5.5\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]}\right\}\frac{(t-0.5)\ln 10-1+0.5\ln 10+1}{(t-0.5)\ln 10-1}$$

$$=\frac{{}_m^1 90}{\ln 10}\left\{1-\frac{{}^1 5.5\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]}\right\}\left[1+\frac{4.5\ln 10+9}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]}\right]$$

$$M(1,t)=\frac{{}_m^1 90}{\ln 10}\left\{1+\frac{9-\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]}\right\}+a \quad (3\le t) \quad (12)$$

由 (7)、(12) 式，得

$$\Pi(1,N)=\int_3^N M(1,t)\,dt=\int_3^N\left\{\frac{{}_\pi^1 90}{\ln 10}\left(1+\frac{9-\ln 10}{9\left[(t-0.5)\ln 10-1\right]}\right)+a\right\}dt$$

$$\Pi(1,N)=\frac{\frac{1}{\pi}90}{\ln 10}\left\{(N-3)+\frac{9-\ln 10}{9\ln 10}\ln\frac{(N-0.5)\ln 10-1}{(3-0.5)\ln 10-1}\right\}+a(N-3) \qquad (13)$$

对 $M(1,N)$ 的贝努利边界定理 $M(1,N)$ 估值得

$$M(1,N)=^{\pm}\sqrt{2S(1,N)\overline{P}(u(N))\left[1-\overline{P}(u(N))\right]\ln\ln S(1,N)}$$

$$=^{\pm}\sqrt{2M(1,N)\ln\ln\left(90\log_{10}N\right)}=^{\pm}\sqrt{\frac{180}{\ln 10}\ln\ln\left(90\log_{10}N\right)}$$

整理上式得(7)式

有关数据如下：

下面数据由东陆论坛网友 wtquan 提供，借此致谢

（http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23350&Forum_ID=9）

211 311 131 113 151 811 181 911 191 223 227 229 313
331 233 433 353 733 373 337 383 443 449 557 661 277
727 773 577 757 677 877 787 977 797 881
883 887 199 919 991 929 499 599 997

3 位 共 46 个.

2111 4111 1511 1151 1171 1117 8111 1811 1181 2221 3313 3331 2333 3323 3433 3343 5333 3533 7333 3733 3373 3833 4441 4447 5557 6661 1777 7177 7717 2777 7727 7477 7577 7757 7877 8887 1999 9199 2999 9929 4999 9949 8999

4 位 共 43 个.

10111 11311 11131 11113 11411 16111 11161 11171 11117 11119 22229 31333 33331 23333 33343 33533 33353 38333 44449 71777 77377 77773 47777 77477 77747 67777 76777 97777 79777 77977 77797 88883 99991 99929 49999 94999 59999 79999 98999 99989

5 位共 40 个 (不超过五位数时的数据也可由东陆论坛网友**斯露化雨**提供实际数据获得：http://www.channelwest.com/bbs/showprint.asp?topic_id=20408&forum_id=7，借此致谢)

101111 112111 111211 111121 311111 131111 113111 511111 611111 111611 911111 111191 111119 313333 331333 333331 323333 333233 333323 343333 334333 333433 353333 333533 733333 333337 333383 444443 444449 555557 666667 727777 777277 773777 777737 775777 777677 787777 778777 777877 777787 777977 888887 199999 991999 999199 999499 599999 999599 999959 799999 999979 989999

6 位 共 53 个.

1111211 1114111 1111151 1171111 1117111 1111711 1111181 3331333 3333133 3333313 3333331 3233333 3333233 3433333 3333433 3353333 3733333 3337333 3333373 3333383 7727777 7772777 7777727 7477777 7774777 7577777 7877777 7778777 9999991 2999999 9929999 9999299 9999929 4999999 9899999

7 位 共 35 个.

11110111 11111101 11131111 11113111 11111311 11111131 11141111 11111141 61111111 11111161 71111111 11111171 11111117 11911111 11111911 11111119 22222223 31333333 33313333 33333133 33333331 32333333 33323333 34333333 33335333 33733333 33333373 83333333 55555553 55555559 66666667 77777177 77777377 77777747 77767777 88888883 19999999 99991999 29999999 999499

99 59999999 99599999 99959999 99995999 99999959 89999999 99899999 99998999 99999989

8 位 共 49 个.

101111111 131111111 111113111 111111131 111111113 115111111 118111111 111181111 111111181 111191111 222222227 333331333 333333313 333233333 333334333 373333333 337333333 333733333 333833333 444444443 666666667 777777773 577777777 777777577 776777777 777767777 777776777 777777677 787777777 778777777 888888883 888888887 999299999 999992999 999999929 999499999 999599999 999999599 799999999 998999999

9 位 共 40 个.

1121111111 1111211111 1111111121 1111411111 1111111411 1151111111 1115111111 1111115111 1711111111 1117111111 1111111181 3333133333 3233333333 3333323333 3333332333 3333333323 3334333333 3333333833 4444444447 5555555557 6666666661 1777777777 7777717777 2777777777 7727777777 7777772777 7777747777 7777777577 8777777777 7778777777 9199999999 9299999999 9999929999 9999999929 9999499999 9959999999 9995999999 9999959999

10 位 共 38 个.

31111111111 11131111111 11113111111 11111111131 11111111113 14111111111 11114111111 11111111611 17111111111 11119111111 11111111911 22222222223 33331333333 33333333133 23333333333 33333333343 33533333333 33353333333 38333333333 33333338333 33333333833 44444444441 66666666667 71777777777 77717777777 77777771777 77777777717 67777777777 76777777777 77777677777 77777777767 79777777777 77777797777 99999199999 99999991999 92999999999 99999992999 99499999999 59999999999 99999999599 79999999999 99999979999 98999999999 99989999999

11 位 共 44 个.

101111111111 111011111111 111111011111 111111110111 111111111101 111211111111 111111211111 311111111111 111113111111 111511111111 111111111511 116111111111 111111111611 333313333333 333332333333 333333333323 333333343333 333335333333 333333733333 383333333333 338333333333 444444444443 555555555551 555555555559 727777777777 772777777777 777727777777 777777777727 377777777777 773777777777 777777737777 777777773777 777777777773 757777777777 777775777777 777777767777 777777777877 777777779777 888888888887 991999999999 999999991999 994999999999 999994999999 999999994999 959999999999 999599999999 999999599999 999999999599 999999999959 999998999999 999999999899 999999999989

12 位 共 52 个.

2111111111111 5111111111111 1111151111111 1111171111111 1811111111111 1111181111111 1111118111111 1111111811111 1111111118111 3433333333333 3333333333433 3333333333383 5555555555551 7177777777777 7777777777177 7777777777771 7777774777777 7777777747777 7777777777747 7577777777777 7775777777777 7777777577777 7777777775777 7877777777777 7778777777777 7777787777777 7777777787777 9919999999999 9999929999999 9999999992999 9999999999299 9999999499999 9999599999999 9979999999999 9999999999799

13 位共 35 个.

31111111111111 41111111111111 11411111111111 11111111411111 11111111141111 11111111111411 11611111111111 11116111111111 19111111111111 11111111911111 11111111119111 22222222222229 33133333333333 33333133333333 33332333333333 33333233333333 33333333332333 33333333333323 33333333433333 53333333333333 33335333333333 33383333333333 17777777777777 77717777777777 77777177777777 77777771777777 77777777771777 47777777777777 67777777777777 77777779777777 77777777977777 77777777797777 77777777777977 88888888888889 99999999991999 99999999999199 99999999999929 99999994999999 59999999999999 95999999999999 99999999999959 9999799999

9999 998999999999999 999998999999999 999999998999999

14 位 共 45 个.

111151111111111 111111151111111 111111111611111 111111111161111 111111111116111 111111181111111 222222222222227 333333313333333 323333333333333 332333333333333 333333333233333 335333333333333 333353333333333 333373333333333 333333373333333 333333333373333 383333333333333 333333383333333 555555555555557 777777727777777 777777777777727 777737777777777 777777777777773 577777777777777 777775777777777 777777757777777 777677777777777 777777776777777 777777777677777 778777777777777 777877777777777 777777778777777 777777777777787 777779777777777 777777977777777 888888888888883 919999999999999 999999199999999 999999999999199 992999999999999 999999999992999 499999999999999 999994999999999 999999499999999 999999999499999 999599999999999 999999899999999 999999999989999 999999999999989

15 位共 49 个.

将上面数据整理成表 10.1

表 10.1 仅一个数码不同的素数数据表

N	$m(1,N)$	$m(1,N)_0$	$M(1,N)_0$	$\frac{1}{m}$	$\pi(1,N)$	$\sum M(1,N)_0$	$\frac{1}{\pi}$
3	45	45．21	47．66	0．9442	45	47．66	0．9442
4	43	43．21	45．66	0．9417	88	93．32	0．9430
5	40	42．20	44．65	0．8959	128	137．97	0．9277
6	53	41．58	44．03	1．2037	181	182．00	0．9945
7	35	41．17	43．62	0．8024	216	225．62	0．9574
8	49	40．88	43．33	1．1309	265	268．95	0．9853
9	40	40．66	43．11	0．9279	305	312．06	0．9774
10	38	40．48	42．93	0．8852	343	352．99	0．9717
11	44	40．35	42．80	1．0280	387	395．79	0．9778
12	52	40．23	42．68	1．2184	439	438．47	1．0012
13	35	40．14	42．59	0．8218	474	481．06	0．9853
14	45	40．06	42．51	1．0586	519	523．57	0．9913
15	49	39．99	42．44	1．1546	568	568．01	1．0000
Σ	568	536．16	568．01				

其中

$$m(1,N)_0=\frac{90}{\ln 10}\left\{1+\frac{9-\ln 10}{9\left[(N-0.5)\ln 10-1\right]}\right\}=39.09\left\{1+\frac{6.697}{9\left[2.303(N-0.5)-1\right]}\right\}$$

$$\sum_{N=3}^{15} m(1,N) =^{1} \sum_{N=3}^{15}\left[m(1,N)_0+a\right]=^{1} \sum_{N=3}^{15} m(1,N)_0+13a$$

$$a=^{\pm}(568-536.16)/13=^{\pm} 2.449$$

$$M(1,N)_0=39.09\left\{1+\frac{6.697}{9\left[2.303(N-0.5)-1\right]}\right\}+2.449$$

$$\frac{1}{m}=\frac{m(1,t)}{M(1,N)_0}\quad , \quad \frac{1}{\pi}=\frac{\pi(1,N)}{\sum M(1,N)_0}$$

将 $a=\pm 2.449$ 代入(12)式得(9)式

将 $a=\pm 2.449$ 代入(13)式得(10)式

表 10.1 中的实际数据较好地支持理论结果

10. 3　出现 t 种因子的概率

定理 3 N 出现 t 种因子的概率为 $P(N,t)$，不大于 N 的自然数中，出现 t 种因子的平均概率为 $\overline{P}(N,t)$，则

$$P(N,t) \qquad (14)$$

$$\overline{P}(N,t) \qquad (15)$$

或

$$P(N,t) \qquad (16)$$

$$\overline{P}(N,t) \qquad (17)$$

证明　(1)　不大于 N 的自然数 x，由两种因子 P_{R_1}、P_{R_2} 构成合数时

$$\prod_{i=1}^{2} P_{R_i}^{A_i} = x \le N \qquad (18)$$

其中　P_{R_i} 表示自然数中，顺序排列的第 R_i 个素数（下同），且

$$1 \le R_1 < R_2$$

最大及最小因子分别表为 $P_{\max}(2,x)$、$P_{\min}(2,x)$，则

$$2 \le P_{\min}(2,x) \le \sqrt{N} \qquad (19)$$

$$P_{R_1+1} \le P_{\max}(2,x) = P_{R_2} = \left(\frac{x}{P_{R_1}^{A_1}}\right)^{\frac{1}{A_2}} \le \left(\frac{N}{P_{R_1}^{A_1}}\right)^{\frac{1}{A_2}} \qquad (20)$$

在 $P_{\min}(2,x)$ 的定义域 $\left(2,\sqrt{N}\right)$ 内，对应于每一个 $P_{\min}(2,x)$ 形式的素数 $p(1)$，与 $P_{\max}(2,x)$ 在由(20)表达的对应定义域内的每一个素数 $p(2)$，均组成由两种因子构成的

合数，其个数为$\Delta S\left(2\right)$，则

$$\Delta S\left(2\right)=\sum_{p\left(1\right)\leq\sqrt{N}}\left\{\pi\left(P_{\max}\left(2,b\right)\right)-\pi\left(p\left(1\right)\right)-1\right\} \tag{21}$$

第 11 章　概率数码论

11.1 随机数

定义 1 当数中任意位置的数码出现的规律，几乎等价于等机随机事件，将此类数称为等机随机数码数,简称随机数码数或随机数，当它们是 n 位数时，简称 n 位随机数

11.2 等几公理——数码子公理

由素数分布公理知，素数分布几乎等价于随机事件，故素数中数码出现的规律，也几乎等价于随机事件；因无理数（超越数）的数码，出现的规律是永不重复，它们也几乎等价于随机事件。它们都是随机数码数，由此在等几公理中，派生出以下子公理

数码子公理　在个数足够多的某类数、或位数足够多的某个数中，数码的出现无简单规律时，其每个数码出现的概率相等，这种数就是随机数

11.3 数码串定理

定义 294 在随机数中， K 个指定位置（如相邻的）指定数码构成的数码串，称为（相邻）K 生数码。它与 K 生素数相对应

定理 295 在 S 进制表达的 n 位随机数中， 数码是 R 或 K 生数码出现的概率、实际个数、理论个数及边界记为 $P(S,n)_R$、$\mathrm{m}(S,n)_R$、$\mathrm{M}(S,n)_R$、 $\mathrm{M}(\mathrm{S,n})_R$、$P(S^k,n)$、$\mathrm{m}(S^k,n)$、$\mathrm{M}(S^k,n)$、 $\mathrm{M}(S^k,n)$，则

$$P(S,n)_R=\frac{1}{S} \tag{1}$$

$$\mathrm{m}(\mathrm{S,n})_R=\mathrm{M}(\mathrm{S,n})_R\pm\ \mathrm{M}(\mathrm{S,n})_R=\frac{n}{S}\pm{}^{\pm}\sqrt{\frac{2n\ln\ln n}{S}\left(1-\frac{1}{S}\right)}\left(1=\frac{n}{S}\right) \tag{2}$$

$$P(S^k,n)=\frac{1}{S^k} \tag{3}$$

$$\mathrm{m}(S^k,n)={}^{1}\ \mathrm{M}(S^k,n)\pm\ \mathrm{M}(S^k,n)=\frac{n}{S^K}\pm{}^{\pm}\sqrt{\frac{2n\ln\ln n}{S^K}\left(1-\frac{1}{S^K}\right)}\left(1=\frac{n}{S^K}\right)$$

$$(4)$$

证明　在 S 进制表达的 n 位随机数中，某指定位置出现 0，1，……..，S-1 这 S 个数码中的任意一个数码 R 的概率 $P(S)_R$，均是 S 分之一，得(1)式

由于随机数的 K 个数码相互独立，相邻 K 个数码均是指定数码，其 K 生数码数出现的概率 $P(S^k, n)$，是 K 个 $P(S)_R$ 之积，得(3)式

数码 R 在 n 位随机数中分布的规律，等价于概率为 S 分之一的 n 次贝努力随机事件，当 n/S 足够大时，将几乎服从重对数定理，由“边界”一章的内容可得(2)式

同理，K 生数码数在 n 位随机数中分布的规律，等价于概率为 S^k 分之一的 n 次贝努力随机事件，当 n/S^k 足够大时，将几乎服从重对数定理，由“边界”一章的内容可得(4)式，证毕

下面的实际数据支持本定理，说明如下

- **π小数点后 2000 亿位中各数字出现的次数（见：http://www.jason314.com/）**

0 ：$20000030841 = 2*10^{10} + 0.31*10^5$　　1 ：$19999914711 = 2*10^{10} - 0.85*10^5$

2 ：$20000136978 = 2*10^{10} + 1.37*10^5$　　3 ：$20000069393 = 2*10^{10} + 0.69*10^5$

4 ：$19999921691 = 2*10^{10} - 0.78*10^5$　　5 ：$19999917053 = 2*10^{10} - 0.83*10^5$

6 ：$19999881515 = 2*10^{10} - 1.2*10^5$　　7 ：$19999967594 = 2*10^{10} - 0.32*10^5$

8 ：$20000291044 = 2*10^{10} + 2.9*10^5$　　9 ：$19999869180 = 2*10^{10} - 1.3*10^5$

以上 10 个数码，在 2000 亿$(2*10^{11})$位数中，每种数码出现个数的理论边界记为 $M(10, 2*10^{11})_R$，则

$$M(10, 2*10^{11})_R = \pm\sqrt{\frac{2*2*10^{11}}{10}\ln\ln(2*10^{11})} = \pm 3.6*10^5$$

个，实际偏差最大的是数码 8 的边界 $m(10, 2*10^{11})_8 = +^{\pm}2.9*10^5$

理论边界 $^{\pm}\mathrm{M}\left(10,2*10^{11}\right)_R$ 比实际边界 $\mathrm{m}\left(10,2*10^{11}\right)_8$ 约大百分之 20

- 一些有趣的数字序列在第小数点后出现的位置 ,如表 11.1 所示

表 11.1

数字序列	出现的位置
01234567891	26,852,899,245
	41,952,536,161
	99,972,955,571
	102,081,851,717
	171,257,652,369
01234567890	53,217,681,704
	148,425,641,592
432109876543	149,589,314,822
543210987654	197,954,994,289
98765432109	123,040,860,473
	133,601,569,485
	150,339,161,883
	183,859,550,237
09876543210	42,321,758,803
	57,402,068,394
	83,358,197,954
10987654321	89,634,825,550
	137,803,268,208
	152,752,201,245
27182818284	45,111,908,393

以上 8 个 11 位数的指定数码串，在 2000 亿 $\left(2*10^{11}\right)$ 位数中，共出现 20 次，平均出现次数记为 $\overline{\mathrm{m}}\left(S^k,n\right)$，则

$$\overline{\mathrm{m}}\left(S^k,n\right)=\overline{\mathrm{m}}\left(10^{11},2*10^{11}\right)=\frac{20}{8}=2.5$$

由上面定理从理论上计算实际个数的分布情况记为 $\mathrm{m}\left(\mathrm{S}^{\mathrm{k}},\mathrm{n}\right)$，由 (4) 式得

$$\mathrm{m}\left(S^{k},n\right) =^{1} \mathrm{M}\left(S^{k},n\right) \pm \ \mathrm{M}\left(S^{k},n\right) = \frac{n}{S^{K}} \pm {}^{\pm}\sqrt{\frac{2n\ln\ln n}{S^{K}}\left(1-\frac{1}{S^{K}}\right)} \ \left(1 = \frac{n}{S^{K}}\right)$$

$$= \frac{10^{11}}{10^{11}} \pm {}^{\pm}\sqrt{\frac{2*2*10^{11}\ln\ln 10^{11}}{10^{11}}\left(1-\frac{1}{10^{11}}\right)} = 1 \pm {}^{\pm} 3.6$$

结合本问题实际情况，每种指定数码串都出现过，故 $\mathrm{m}\left(S^{k},n\right)$ 的下限等于 1；上限约 4.6，上下限中间值约为 2.8 个；实际数据最少是 1 个，最多是 5 个，平均为 2.5 个

实际数据支持理论结果，虽 (4) 式的要求：$1 = n \div S^{K} = 1$ 未被满足

ξ 11.4 随机数码素数定理

定理　在 S 进制随机数中，指定 k 位数码序列数 m，出现素数的频率、概率记为 $\rho_p\left(S^{k},m\right)$、$P_p\left(S^{k},m\right)$，　m 附近的自然数出现素数的频率、概率记为 $\rho(m)$、$P(m)$，在 $k \le x$ 位 S 进制数码序列数 m 中，出现素数的个数、边界记为 $\pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$、$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$、　$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$、$\sigma_p\left(S^{k\le x},m\right)$，则

$$\rho_p\left(S^{k},m\right) = \rho(m) \quad , \quad P_p\left(S^{k},m\right) =^{1} P(m) =^{1} \rho_p\left(S^{k},m\right) = \frac{^{1}1}{\ln m} \qquad (5)$$

$$\pi_p\left(S^{k\le x},m\right) = \sum_{k\le x} \rho_p\left(S^{k},m\right) \qquad (6)$$

$$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right) = \frac{^{1}\ln(x-0.5)}{\ln S} \qquad (1 = x) \qquad (7)$$

$$\sigma_p\left(S^{k\le x},m\right)=^{1}\sqrt{\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)\left[1-\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)\div x\right]}$$

$$=^{1}\sqrt{\frac{\ln(x-0.5)}{\ln S}\left[1-\frac{\ln(x-0.5)}{x\ln S}\right]}=^{1}\sqrt{\frac{\ln(x-0.5)}{\ln S}}\qquad (1=x)\qquad (8)$$

$$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)=^{1}\sigma_p\left(S^{k\le x},m\right)\sqrt{2\ln\ln x}$$

$$=^{1}\sqrt{\frac{2\ln\ln x\ln(x-0.5)}{\ln S}}\qquad (1=x)\qquad (9)$$

$$\pi_p\left(S^{k\le x},m\right)=\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)\pm\ \Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$$

$$=\frac{^{1}\ln(x-0.5)}{\ln S}\pm^{1}\sqrt{\frac{2\ln\ln x\ln(x-0.5)}{\ln S}}\qquad (1=x)\qquad (10)$$

证明 (6) 式是定义的表达式。显然 $\rho_p\left(S^k,m\right)=\rho(m)$ 成立，由素数子公理，及随机数定义得 $P_p\left(S^k,m\right)=^{1}P(m)$

得 (5) 式

依定理叙述得 $S^{k-1}\le m\le S^k-1$

则

$$\frac{^{1}1}{\ln\left(S^k-1\right)}\le P_p\left(S^k,m\right)=^{1}P(m)=\frac{^{1}1}{\ln m}\le\frac{^{1}1}{\ln\left(S^{k-1}\right)}$$

$$\frac{^{1}1}{k\ln S}\le P_p\left(S^k,m\right)\le\frac{^{1}1}{(k-1)\ln S}$$

$$P_p\left(S^k,m\right)=\frac{^{1}1}{(k-0.5)\ln S}\qquad (1=k)$$

$$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)=\sum_{k\le x}P_p\left(S^k,m\right)$$

$$=^{1}\sum_{k\le x}\frac{{}^{1}1}{\left(k-0.5\right)\ln S}=\int^{x}\frac{{}^{1}dk}{\left(k-0.5\right)\ln S}=\frac{{}^{1}\ln\left(x-0.5\right)}{\ln S}\qquad\left(1=x\right)$$

得$\left(7\right)$式。由第二章的随机试验重对数边界

$$\sigma\left(h\left(n\right)\right)=^{\pm}\sqrt{\pi\left(h\left(n\right)\right)\left[1-\pi\left(h\left(n\right)\right)\div n\right]}\qquad(11)$$

$$B\left(n\right)=^{\pm}\sqrt{2\pi\left(h\left(n\right)\right)\left[1-\pi\left(h\left(n\right)\right)\div n\right]\ln\ln n}=^{\pm}\sigma\left(h\left(n\right)\right)\sqrt{2\ln\ln n}\qquad(12)$$

其中公式中随机试验次数n、发生次数$\pi\left(h\left(n\right)\right)$，在本问题中是$x$、$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$；边界、均方差符号用${}_B\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$、$\sigma_p\left(S^{k\le x},m\right)$代替上式中${}_BB\left(n\right)$、$\sigma\left(h\left(n\right)\right)$，得$\left(8\right)$、$\left(9\right)$、$\left(10\right)$式

ξ　11.5 圆周率序列中的素数

本节问题，就是随机数码素数定理解决的问题，实际数据如下

1）3
2）31
3）314159
4）31415926535897932384626433832795028841
5）500 位以下的已经排除！！！！

见东陆论坛网友 635207720（sss777@qq.com ）发帖：
http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23821&Forum_ID=10

将上面的实际数据，及随机数码素数定理中的理论数据整理成表 11.2

表 11.2 圆周率序列中的素数数据表

x	π_p	$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0$	$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0$	$r_p\left(S^{k\le x},m\right)$	$R_p\left(S^{k\le x},m\right)$
1	1	C−0.3010	1.6101	1−0.6211	0.6211
2	2	C+0.1761	2.0872	1−0.9582	0.9582
6	3	C+0.7404	2.6515	1−1.1314	1.1314
38	4	C+1.5740	3.4851	1−1.1477	1.1477
500	4	C+2.6990			
x_5	5				

上表说明

1、$\pi_p=\pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$

2、除去(7)式中右边渐近函数，并加一个常数项C，表为$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0$，近似表达$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$值，即

$$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0=C+\frac{\ln\left(x-0.5\right)}{\ln S}$$

3、 $r_p\left(S^{k\le x},m\right)=1-\pi_p\div\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0$

4、 $R_p\left(S^{k\le x},m\right)=\ \Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)\div\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0$

$$=^1\sqrt{\frac{2\ln\ln x\ln\left(x-0.5\right)}{\ln S}}\div\left[C+\frac{\ln\left(x-0.5\right)}{\ln S}\right]$$

5、用$\pi_p\left(S^{k\le x},m\right)$与$\Pi_p\left(S^{k\le x},m\right)_0$累计值相等的方法，估值常数C

$$1+2+3+4=4C-^{\pm}0.3010+0.1761+0.7404+1.5740=4C+^{\pm}2.3555$$

$$C=\left(10-^{\pm}2.3555\right)\div4=^{\pm}1.9111$$

6、 $S=10$

7、虽在较小数据范围内，实际数据仍较好地支持了要求在足够大条件下获得的理论结果

K 生事件

本书用随机的方法研究的几个无规律确定事件：素数、数码及格点，其结果均得到实际数据支持，可将此法推广到其它无规律确定事件中，其它 K 生确定事件的解决方法参照 K 生素数；故用边界、K 生素数、概率数码论等章节的方法研究 K 生事件，更是顺理成章：不管它是随机事件还是确定事件。K 生事件是 K 生素数等的推广，K 生素数等是 K 生事件的特例。

为简化叙述和方便阅读，本章内容的叙述过程，几乎是 K 生素数一章内容的翻版，并用试验代替自然数、用指定事件即事件 A、$\left(A_1, A_2\right)$、……，代替素数 p、$\left(p_1, p_2\right)$、……，用间段即指定间距代替素段、用非指定事件代替合数，用 N 次试验的事件定理 $\pi\left(N\right)$ 代替自然数 N 内的素数定理 $\pi\left(N\right)$、用概率代替素数率、用事件间距代替素数间距，……，即用概率的量代替素数的对应量，其定义、运算、表达及结果等作相应的处理，省约部分简单易懂或重复类似的叙述

12. 1.1 K 生事件定义及表达

定义 1 两相邻事件 $\left(A_n, A_{n+1}\right)$、$\left(A, A+d_1\right)$ 之差 $A_{n+1}-A_n$ 和 d_1，称为相邻事件 $\left(A_n, A_{n+1}\right)$ 或 $\left(A, A+d_1\right)$ 的间距，可将 $A_{n+1}-A_n$ 记为 d，则

$$d = A_{n+1} - A_n$$

定义 2 当 K 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 均两两相邻，称它们是 K 个相邻事件；如在若干组 K 个相邻事件中，对应事件间距相同时，称这 K 个事件是指定事件间距的 K 生事件，简称 K 生事件。可记为 $A, A+\sum_{i=1}^{1-1} d_i$，…，$A+\sum_{i=1}^{k-1} d_i$，可简写为 $A\langle A_1 \mid d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}\rangle$、$A\langle A_1 \mid d_{k-1}\rangle$、$p\langle d_{k-1}\rangle$、$\langle d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}\rangle$ 或 $\langle d_{k-1}\rangle$ 等，将 $A_1\langle A_1 \mid d_{k-1}\rangle$ 称为最小 K 生事件；表达式 $\langle d_{k-1}\rangle$ 中的符号：“〈 〉”称为棱形括号，简称棱括号，用它表示 K 生事件；同理，可将 d_i 表达如下：

$$d_i = A_{i+1} - A_i \qquad \left(1 \le i \le k-1\right)$$

K 生事件有三个要素：

1、K 个事件两两相邻；

2、需指定 $K-1$ 个相邻事件之间的间距；

3、试验中有较多这样的事件组合（否则没统计意义）

定义 3 在 K 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中，最小事件 A_1 称为 K 小事件，最大事件 A_k 称为 K 大事件，将 K 大事件的大小，作为 K 生事件的大小

因 K 大事件的大小，作为 K 生事件的大小，在不易混淆时，可直接用 K 生事件代替 K 大事件进行叙述

定义 4　不大于 N 的试验中，形如 $A\langle d_{k-1}\rangle$ 或 $\langle d_{k-1}\rangle$ 的 K 生事件的个数，称为 K 生事件定理，记为 $\pi\left(N, A\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 或 $\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)$。结合事件定理 $\pi\left(N\right)$ 表达如下：

$$\left.\begin{aligned}&\pi\left(N\right)=\sum_{A\le N}1\\&\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)=\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)=\pi\left(N,A\langle d_{k-1}\rangle\right)=\sum_{A\langle d_{k-1}\rangle\le N}1=\sum_{\langle d_{k-1}\rangle\le N}1\end{aligned}\right\}$$

在上面定义的表达式中，当 K=1 时，两者等价：

$$\pi\left(N, A\langle d_{k-1}\rangle\right)\Big|_{k=1}=\pi\left(N\right)$$

否则，对两者的理解如下：

在 N 次试验中，每出现一次指定事件 A，就用 Σ 累加一次，总个数表为 $\pi\left(N\right)$；同理，在在 N 次试验中，每出现一个形如 $A\langle d_{k-1}\rangle$ 或 $\langle d_{k-1}\rangle$ 的 K 生事件，就用 Σ 累加一次，总个数表为 $\pi\left(N, A\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 或 $\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)$

注意：三个表达式：$\pi\left(N, A\langle d_{k-1}\rangle\right)$、$\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 或 $\pi\left(N\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 数学意义相同，在 $\pi\left(N,\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 中可标记也可不标记逗号“，”，但在 $\pi\left(N, A\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 中必须标记逗号“，”，否则，$\pi\left(NA\langle d_{k-1}\rangle\right)$ 就变成了表示 NA 范围内的 K 生事件个数

定义 5 在 K 生事件中，K 个事件间的 $k-1$ 间距之和 $\sum_{i=1}^{k-1}d_i$，称为 K 生事件的段长。

在 K 生事件中叙述段长时，要指明是 K 生事件的段长 $\sum_{i=1}^{k-1}d_i$，还是 K 生事件内某两相邻事件间的段长 d_i

定义 6 在 N 次试验中，如果 K 生事件$\langle d_1, d_2, \cdots, d_{k-1} \rangle$存在多个对应段长相同且总段长最短或最长的 K 生事件，称它们为最密或最稀 K 生事件，记为${}^{\downarrow}\langle d_{k-1} \rangle$、${}^{\uparrow}\langle d_{k-1} \rangle$。即它段长的下界或上界，记为${}^{\downarrow}d\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$、${}^{\downarrow}D\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$、${}^{\uparrow}d\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$、${}^{\uparrow}D\left(N, \langle d_{k-1} \rangle\right)$。因后面可证明下界与 N 无关，故下界可简写为${}^{\downarrow}d\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、${}^{\downarrow}D\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$。如

最密 2 生素数： $A, A+{}^{\downarrow}d_1$（即孪生素数），可简写为${}^{\downarrow}\langle d_1 \rangle$ 等

最密 3 生素数：$A, A+{}^{\downarrow}d_1, A+{}^{\downarrow}d_2$，可简写为${}^{\downarrow}\langle d_2 \rangle$ 等

最密 4 生素数：$A, A+{}^{\downarrow}d_1, A+{}^{\downarrow}d_2, A+{}^{\downarrow}d_3$，可简写为${}^{\downarrow}\langle \mathrm{d}_3 \rangle$ 等

最密 5 生素数：$A, A+{}^{\downarrow}d_1, A+{}^{\downarrow}d_2, A+{}^{\downarrow}d_3, A+{}^{\downarrow}d_4$，可简写为${}^{\downarrow}\langle d_4 \rangle$ 等

…………

$A \le N$ 的 K 生事件$\langle d_{k-1} \rangle$出现的频率、概率、个数、边界及均方差等量，可表为$\rho\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$P\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$\pi\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$\Pi\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$\pi\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$\Pi\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$、$\sigma\left(\langle d_{k-1} \rangle\right)$

具体类型的 K 生事件，用较适合的表达式即可，因刚开始对 K 生事件及相关量进行系统研究，它们的表达方法，可根据需要或方便而定，使用前进行说明即可，不限于某种固定形式

下面分析 N 次试验中，K 生事件的分布规律，由此可将它推广到任意概率分布函数中，K 生事件的分布规律

7. 1.2 二生事件的分布

二生事件就是相邻事件$\left(A_1, A_2\right)$，其差$A_2 - A_1$称为间距或段长记为 x，则

$$x = A_2 - A_1$$

定义 8 不大于 N 次试验中，段长度接近 1 、${}^{\uparrow}d\left(N\right)$,或段长个数最多附近的间距，分别称为低端间距、高端间距及中端间距，简称低端、高端或中端，并将此类指定的间距称为指定间距

注：这里说的“间距”、“段长”及“指定间距”等，都表示它们两端均发生指定事件，

中间均发生非指定事件

推理 1　$t \le N$ 的 N 次试验中，实际及理论事件个数，记为 $\pi(N)$ 及 $\Pi(N)$，它们将 $(1,N)$ 这 N 次试验，分成了 $\pi(N)$ 或 $\Pi(N)$ 个间距，其最短最长段长——间距边界的实际及理论值，分别记为 ${}^{\downarrow}d(N)$、${}^{\uparrow}d(N)$、${}^{\downarrow}D(N)$、${}^{\uparrow}D(N)$

证明　略

引理 1　将 $t \le N$ 的 N 次试验中，段长为 x 的指定间距 (A_1, A_2) 出现实际及理论个数，记为 $\pi(N,x)$ 及 $\Pi(N,x)$，它们出现的频率及概率，记为 $\rho(t,x)$、$P(t,x)$，它们在 $(1,N)$ 内的平均频率及概率分布函数，记为 $\overline{\rho}(N,x)$，及 $\overline{P}(N,x)$，则

$$\overline{\rho}(N,x) = \frac{\pi(N,x)}{\pi(N)} =^{1} \overline{P}(N,x) = \frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)} \qquad (1)$$

$$\Pi(N,x) = \int^{N} P(t,x)\,dt \qquad (2)$$

$$P(N,x) = \frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x)\,\Pi(N)\ ,\ P(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(t,x)\,\Pi(t) \qquad (3)$$

$$P(t,x) = \left[\Pi(t) - \Pi(t-1)\right]\left[\Pi(t-x) - \Pi(t-x-1)\right]$$

$$\prod_{J=1}^{x-1}\left[1 - \Pi(t-J) + \Pi(t-J-1)\right] \qquad (4)$$

$$\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}0.5d(N,1)} x\,\overline{\rho}(N,x) = \frac{{}^{1}N}{\pi(N)} \qquad (5)$$

$$\int_{0}^{\infty} x\,\overline{P}(N,x)\,dx = \frac{{}^{1}N}{\Pi(N)} \qquad (6)$$

证明　将 $t \le N$ 的试验中，段长为 x 的指定间距出现的个数，记为 $\pi(N,x)$ 及 $\Pi(N,x)$，此 $\pi(N)$、$\Pi(N)$ 个指定间距将 $(1,N)$ 分割成 $\pi(N)$、$\Pi(N)$ 个间距，故

$$\overline{\rho}(N,x) = \frac{\pi(N,x)}{\pi(N)}\quad ,\quad \overline{P}(N,x) = \frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)}$$

得本引理 $\overline{\rho}(N,x)$ 及 $\overline{P}(N,x)$ 表达式(1)式，(1)式或上式变形显然得

$$\Pi(N,x)=\Pi(N)\ \overline{P}(N,x)=\int^{N}P(t,x)\,dt$$

得(2)式，对上式取积分上限N的偏导得(3)式

下式的意思是 当t与$t-x$同时出现指定事件时，则

$$\left[\pi(t)-\pi(t-1)\right]\left[\pi(t-x)-\pi(t-x-1)\right]=1$$

当$(t-x,t)$内没有指定事件时，则

$$\prod_{J=1}^{x-1}\left[1-\pi(t-J)+\pi(t-J-1)\right]=1$$

此时的t与$t-x$是间距为x的相邻事件，故出现的频率$\rho(t,x)=1$，得本引理$\rho(t,x)$的表达式(4)式

值为 x 的指定间距，乘以它在(1，N)内出现的次数$\pi(N,x)$或$\Pi(N,x)$，就是这种间距，在(1，N)内的累计长度，记为$m(N,x)$及$M(N,x)$

$$m(N,x)=x\pi(N,x)=x\overline{\rho}(N,x)$$

$$M(N,x)=x\Pi(N,x)=x\overline{P}(N,x)\Pi(N) \qquad (7)$$

x在定义域$\left(1,\ {}^{\uparrow}d(N)\right)$内，对各种指定间距的累计长度求和，就得到(1，N)内的各种指定间距总长度记为$m(N)$或$M(N)$。显然，当N是指定事件时$m(N)=N$；否则$N-m(N)$的值，不大于N内指定间距的最大段长${}^{\uparrow}d(N)$，后面将证明

$${}^{\uparrow}d(N)=^{\pm}$$

则

$$m(N)=\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}d(N)}m(N,x)=\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}d(N)}x\pi(N,x)=\sum_{x=1}^{{}^{\uparrow}d(N)}x\pi(N)\overline{\rho}(N,x)=^{1}N$$

$$M(N)=\int_0^{\uparrow D(N)} M(N,x)\,dx =^1 \int_0^{\infty} x\Pi(N,x)\,dx =^1 \int_0^{\infty} x\Pi(N)\overline{P}(N,x)\,Ndx$$

上式变形得本引理$m(N)$、$M(N)$的表达式(5)式、(6)式

7. 1.3 二生事件的正指性

暂无法对(7)中的$\overline{P}(N,x)$、$P(N,x)$等进行严格求解，下面分析它们的规律，为求近似解作准备

引理 2

$$\overline{P}(N,x)=^1 \frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)}=\begin{cases} {}^1P_n(N,x) & (x<x_m) \\ {}^1P_e(N,x) & (x_m\le x) \end{cases} \qquad (8)$$

$$P_n(N,x)=2^{\pm}C_nP_n(N,x)_0=\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (x<x_m) \qquad (9)$$

$$P_e(N,x)={}^{\pm}C_eP_e(N,x)_0=\frac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right) \quad (x_m\le x) \qquad (10)$$

其中 ${}^{\pm}C_n$、${}^{\pm}C_e$可称为标准概率分布函数系数

证明　先分析 N 充分大时，$\overline{P}(N,x)$的近似分布类型

正态分布——多因素分析法

概率论指出　某量在作用都不太大的众多因素影响下，将呈正态分布[4] P121

在贝努里型等随机试验中，可近似认为是由众多因素影响下产生，如抛向空中的硬币，与它的初始壮态、与它碰撞的空气分子等都有关，使$P(N,x)$趋近正态分布，得(8)式的上部分

指数分布——寿命分析法

概率论指出　各种寿命现象的分布，趋近指数分布[4] P125 。让试验次数 Y 在试验中，从 1 到 N 匀速逐个取值，它运行在任何一个间距的“寿命”结束时， 标志着它运行在下一个素段“寿命”的开始，形成了“寿命”现象的分布，故它又趋近指数分布

由上面正指性分析，可将$(1,N)$内段长为x的二生事件的段长平均概率分布函数记为$\overline{P}(N,x)$，得(8)式

将(归一化的)标准正态及指数分布函数，分别表为$P_n(N,x)_0$及$P_e(N,x)_0$，则

$$P_n(N,x)_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)(-\infty<x<\infty) \tag{11}$$

$$P_e(N,x)_0=\frac{1}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)\ (0<x<\infty) \tag{12}$$

$P_n(N,x)$的值，应接近“边界”一章定义过的单边正态分布函数——它的值是标准正态分布函数$P_n(N,x)_0$的两倍得(9)；概率指数分布函数$P_e(N,x)$的值，应接近标准形式$P_e(N,x)_0$得(10)式

定义 9 将二生事件段长分布中，既含正态分布，又具指数分布的双重特性，称为二生事件的正态指数分布性,简称正指性

推理 2 概率论指出：正态分布、指数分布等概率事件，具有传递性：由这类分布事件组成的复合概率事件，也具有相同概率分布特征，故可将正指性推广到 K 生事件中[5]P126

. 1.4 二生事件定理

定理 1 $t\le N$的自然数中，段长为x的二生事件出现的频率、概率、两者的平均值记为$\rho(t,x)$、$P(t,x)$、$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$，在它们的正指性中，段长为x的归一化的正态布函数记为$P_n(N,x)$，指数分布函数记为$P_e(N,x)$，二生事件出现的个数——二生事件定理，记为$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$，则

$$\overline{P}(N,x)=P_n(N,x)=\frac{^{\pm}2C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)\quad\left(\sigma_n={}^{\pm}\frac{\sqrt{2\pi}\,N}{2\Pi(N)},\ x\le x_m\right)$$

$$=\frac{^{\pm}2C_n\Pi(N)}{\pi N}\exp\left(\frac{-\Pi^2(N)\,x^2}{\pi N^2}\right)\quad\left(\sigma_n={}^{\pm}\frac{\sqrt{2\pi}\,N}{2\Pi(N)},\ x\le x_m\right) \tag{13}$$

$$\overline{P}(N,x)=P_e(N,x)=\frac{{}^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)\quad\left(\sigma_e=\frac{{}^{\pm}N}{\Pi(N)},\quad x_m\le x\right)$$

$$=\frac{{}^{\pm}C_e\Pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{\Pi(N)x}{N}\right)\quad\left(\sigma_e=\frac{{}^{\pm}N}{\Pi(N)},\quad x_m\le x\right)\tag{14}$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_e}=^{\pm}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=^{\pm}0.7979\tag{15}$$

$$P(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{{}^{\pm}2C_n\Pi^2(t)}{\pi t}\exp\left(\frac{-\Pi^2(t)x^2}{\pi t^2}\right)\quad(x\le x_m,1=t)\tag{16}$$

$$P(t,x)=\frac{\partial}{\partial N}\frac{{}^{\pm}C_e\Pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{\Pi(N)x}{N}\right)\quad\left(\begin{matrix}x_m\le x\\1=t\end{matrix}\right)\tag{17}$$

$${}^{\pm}\overline{C}_n={}^{\pm}\overline{C}_e=1\tag{18}$$

$$x_m=\frac{\sigma_n^2}{\sigma_e}\left(1+\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\tag{19}$$

$$\pi(N,x)=^{1}\Pi(N,x)=^{1}\Pi(N)\overline{P}(N,x)$$

$$=\begin{cases}{}^{1}\Pi(N)P_n(N,x)=\dfrac{{}^{\pm}2C_n\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\dfrac{-\Pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right)\ (x\le x_m)\\[2ex]{}^{1}\Pi(N)P_e(N,x)=\dfrac{{}^{\pm}C_e\Pi^2(N)}{N}\exp\left(-\dfrac{\Pi(N)x}{N}\right)\quad(x_m\le x)\end{cases}\tag{20}$$

其中　$\sigma_n(N)$ 及 $\sigma_e(N)$ 是正态及指数分布的均方差；x_m 是二生素数段长正态及指数分布的分界点——等值点；${}^{\pm}C_n$ 或 ${}^{\pm}C_e$ 是同阶函数形式的素率系数，以标准的正态分布或指数分布为权，　在段长 $2x$ 的定义域内，对 ${}^{\pm}C_n$ 、${}^{\pm}C_e$ 进行加权平均的值记为 ${}^{\pm}\overline{C}_n$ 、${}^{\pm}\overline{C}_e$

证明　既然归一化的 $P_n(N,x)$ 及 $P_e(N,x)$

$$\int_0^{\infty}P_n(N,x)\,dx=\int_0^{\infty}2^{\pm}C_nP_n(N,x)_0\,dx=1\tag{21}$$

$$\int_0^{\infty} P_e\left(N,x\right)dx=\int_0^{\infty} {}^{\pm}C_e P_e\left(N,x\right)_0 dx=1 \quad (22)$$

分别接近于标准的正态分布 $P_n\left(N,x\right)_0$ 的两倍，或指数分布 $P_e\left(N,x\right)_0$。将 ${}^{\pm}C_n$ 以标准正态分布函数 $P_n\left(N,x\right)_0$ 为权，在段长 x 的定义域内进行加权平均值表为 ${}^{\pm}\overline{C}_n$，或将 ${}^{\pm}C_e$ 以指数分布函数 $P_e\left(N,x\right)_0$ 为权，在段长 x 的定义域内进行加权平均值表为 ${}^{\pm}\overline{C}_e$，则

$$^{\pm}\overline{C}_n=\frac{\int_0^{\infty} 2^{\pm}C_n P_n\left(N,x\right)_0 dx}{\int_0^{\infty} P_n\left(N,x\right)_0 dx}=\int_0^{\infty} P_n\left(N,x\right)dx=1$$

$$^{\pm}\overline{C}_e=\frac{\int_0^{\infty} {}^{\pm}C_e P_e\left(N,x\right)_0 dx}{\int_0^{\infty} P_e\left(N,x\right)_0 dx}=\int_0^{\infty} P_e\left(N,x\right)dx=1$$

即 ${}^{\pm}\overline{C}_n$ 或 ${}^{\pm}\overline{C}_e$ 均等于 1 得(18) 式

将(9) 式代入(6) 式，用 ${}^{\pm}\overline{C}_n=1$ 近似代替 ${}^{\pm}C_n$，计算 $\sigma_n(N)$ 的渐近解得

$$\frac{N}{\Pi(N)}={}^{1}\int_0^{\infty} x\overline{P}(N,x)dx={}^{1}\int_0^{\infty} xP_n\left(N,x\right)dx=\int_0^{\infty} x\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)dx$$

$$=-\frac{2\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} {}^{\pm}\overline{C}_n\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)d\left(\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}\right)=-\frac{^{\pm}2\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}$$

整理上式得(13) 式中 σ_n 的表达式

同理，将(10) 式代入(6) 式，用 ${}^{\pm}\overline{C}_e=1$ 近似代替 ${}^{\pm}C_e$ 的值，计算 σ_e 的渐近解得

$$\frac{N}{\Pi(N)}=\int_0^{\infty} {}^{1}x\overline{P}(N,x)dx=\int_0^{\infty} {}^{1}xP_e\left(N,x\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty} x\frac{^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_e}\right)dx=-{}^{\pm}\int_0^{\infty} x{}^{\pm}\overline{C}_e d\exp\left(\frac{-x}{\sigma_e}\right)$$

$$={}^{\pm}\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_e}\right)dx=-{}^{\pm}\sigma_e\exp\left(\frac{-x}{\sigma_e}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}={}^{\pm}\sigma_e$$

整理上式得(14)式中σ_e的表达式，利用σ_e 有

$$\overline{P}(N,x)=P_e(N,x)=\frac{2^{\pm}C_e\Pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{2\Pi(N)x}{N}\right)\quad (x_m\le x)$$

得(14)式的后一部分表达式

由(13)式及(14)式得(15)式

利用素数统计实际数据显示：低端趋近正态分布，高端趋近指数分布，中端两种分布均接近。故在中端，以正指分布的等值点，记为x_m为界，低端用正态分布，高端用指数分布,分别单独近似描述$\overline{P}(N,x)$，可得(13)式、(14)式的全部表达内容

下面给x_m定义一个名称：

定义 10　段长等于x_m的点，既是$\overline{P}(N,x)$正态分布与指数分布的等值点，又是两种分布的分界点，称为正指分界点，简称分界点。将低端称为正态分布区，将高端称为指数分布区

由(1)式、(13)式及(14)式得

$$\pi(N,x)={}^{1}\ \Pi(N,x)={}^{1}\ \overline{P}(N,x)\Pi(N)$$

$$=\begin{cases}{}^{1}P_n(N,x)\Pi(N)=\dfrac{\pm 2C_n\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\dfrac{-\Pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right) & (x\le x_m)\\ {}^{1}P_e(N,x)\Pi(N)=\dfrac{\pm C_e\Pi^2(N)}{N}\exp\left(-\dfrac{\Pi(N)x}{N}\right) & (x_m\le x)\end{cases}$$

得(20)式

由(3)式及(20)式的正态分布情况，得

$$P(N,x)=\frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x)\Pi(N)=\frac{\partial}{\partial N}\frac{\pm 2C_n\Pi^2(N)}{\pi N}\exp\left(\frac{-\Pi^2(N)x^2}{\pi N^2}\right)$$

将上式中的 N 换成 t 得(16)式。同理由(3)式及(20)式的指数分布情况，得

$$P(N,x)=\frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x)\Pi(N)=\frac{\partial}{\partial N}\frac{^{\pm}C_e\Pi(N)}{N}\exp\left(-\frac{\Pi(N)x}{N}\right)\quad\begin{pmatrix}x_m\leq x\\1=t\end{pmatrix}$$

将上式中的N换成t得(17)式

由(9)式及(10)式两式，计算正指等值点x_m如下：

$$P_n(N,x_m)=\frac{2^{\pm}C_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x_m{}^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$=P_e(N,x_m)=\frac{^{\pm}C_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x_m}{\sigma_e}\right)$$

对上式两边取平均得

$$\frac{2^{\pm}\overline{C}_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x_m^2}{2\sigma_n^2}\right)=\frac{^{\pm}\overline{C}_e}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x_m}{\sigma_e}\right)$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(\frac{-x_m{}^2}{2\sigma_n^2}\right)=\frac{^{1}1}{\sigma_e}\exp\left(-\frac{x_m}{\sigma_e}\right)$$

两边取对数并移项,得

$$\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}-\frac{x_m{}^2}{2\sigma_n^2}=^{\pm}\varepsilon-\ln\sigma_e-\frac{x_m}{\sigma_e}$$

整理上式，得

$$\frac{x_m{}^2}{2\sigma_n^2}-\frac{x_m}{\sigma_e}+^{\pm}\varepsilon=\ln\sigma_e+\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}$$

$$=\ln\frac{2\sigma_e}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}=\ln\frac{2}{\pi}=-\ln\frac{\pi}{2}$$

所以

$$x_m=\sigma_n^2\left(\frac{1}{\sigma_e}\pm\sqrt{\frac{1}{\sigma_e^2}-\frac{1}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\sigma_n^2}{\sigma_e}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^2}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

因$2x_m$在中端，上式应取正号，经近似计算得(19)式

可将事件率系数${}^{\pm}C_n$ 和${}^{\pm}C_e$统一用${}^{\pm}C$表达如下

$$
{}^{\pm}C=\begin{cases} {}^{\pm}C_n = P_n\left(N,x\right)\dfrac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}{2}\exp\left(\dfrac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ {}^{\pm}C_e = P_e\left(N,x\right)\sigma_e\exp\left(\dfrac{x}{\sigma_e}\right) \end{cases} \tag{23}
$$

由此得下面数据表中计算${}^{\pm}C$值的公式

相关数据如表 7.1 、 表 7.2 、 表 7.3 、 表 7.4 、 表 7.5 、 表 7.6 所示

说明 1、 素率系数${}^{\pm}C$表中，个数较少或接近最大间距，引起太大偏差，完全失去统计意义的值未列入， 并以“------”表之

说明 2、 同一x值的${}^{\pm}C$值，随N变化较小，同一N值的${}^{\pm}C$值，随x变化较大，这个现象符合我们的认识

7.4　相邻 K 生事件问题

7.4.1 相邻二生事件的正指性

本节问题的解决方式，与二生事件问题的解决方式相似

本节定理的证明过程，与二生事件的对应定理的证明相似

定理 5 两相邻二生事件的分布仍具有正指性

证明 与二生事件分布的正指性分析及证明过程类似，且概率论对若干概率分布函数的复合分布，具有传递性——具有相同的分布类型，已有定论[5]P126，证毕

7.4.2 相邻二生事件定理

定义 13 两个段长均指定为x，相距为y的相邻相同二生事件，称为指定相邻二生事件，简称相邻二生事件，记为$x+y$，示意图如下

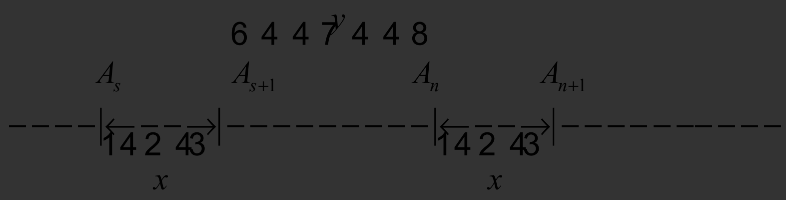


图7 相邻二生事件示意图

此定义有以下意义

1　当两个段长相同的相邻二生事件，共用中间一个指定事件时，它们就变成了三生事件

2 当两个段长相同的二生事件之间，没有其它事件时，它们就变成了四生事件

3 当两个段长相同的二生事件之间，有一个或多个其它段长的二生事件或事件，就是一般化的相邻二生事件

定义 14 两个段长均为x，相距为y，两者间无指定事件时的相邻相同二生事件，称为最相邻相同二生事件，简记为$x+^{\downarrow}y$；当$x={}^{\downarrow}x$时，就成了最紧密的四生事件$\left(A, A+^{\downarrow}x, A+^{\downarrow}x+^{\downarrow}y, A+2^{\downarrow}x+^{\downarrow}y\right)$，可称为最相邻孪生事件　　，

推理 7　$t\le N$的试验中，段长是x的二生事件的实际及理论个数，记为$\pi\left(N,x\right)$及

$\Pi(N,x)$，它们将$(1,N)$这段试验分成$\pi(N,x)$或$\Pi(N,x)$段；同理，两段长均是x且相距是y的的两相邻相同二生事件的事件，可表达成事件组的形式$(A_s, A_{s+1}, A_n, A_{n+1})$

$$x = A_{s+1} - A_s = A_{n+1} - A_n \quad , \quad y = A_n - A_{s+1}$$

，也可简记为$x+y$的事件组，其个数记为$\pi(N,x,y)$或$\Pi(N,x,y)$，它们把$(1,N)$内的试验分成了$\pi(N,x,y)$或$\Pi(N,x,y)$个间距

引理 3　$t \le N$的试验中，段长是x的间距实际及理论个数——二生事件定理，记为$\pi(N,x)$或$\Pi(N,x)$，间距是y的两相邻相同二生事件的事件组，在$(1,N)$内，出现的频率、概率及它们的平均值，记为$\rho(N,x,y)$、$P(N,x,y)$、$\overline{\rho}(N,x,y)$及$\overline{P}(N,x,y)$，则

$$\overline{\rho}(N,x,y) = \frac{\pi(N,x,y)}{\pi(N)} =^1 \overline{P}(N,x,y) = \frac{\Pi(N,x,y)}{\Pi(N)} = \frac{\Pi(N,x,y)}{\Pi(N)} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \pi(N,x,y) = \sum_{t=0}^{N} \rho(t,x,y) = \overline{\rho}(N,x,y)\pi(N) \\ \Pi(N,x,y) = \int^{N} P(t,x,y)\,dt = \overline{P}(N,x,y)\Pi(N) \end{cases} \quad (44)$$

$$M(N,x) = \int^{\infty} 2(x+y)\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)\,dy =^1 N \quad (48)$$

$$P(N,x,y) = \frac{\partial}{\partial N}\Pi(N,x,y) = \frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x,y)\Pi(N) \quad (45)$$

$$P(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(t,x,y)\Pi(t) \quad (46)$$

$$m(N,x) = \sum_{y=1}^{\uparrow d(N,x)} 2(x+y)\overline{\rho}(N,x,y)\pi(N) = N \quad (47)$$

证明　如前所叙：因$\pi(N)$、$\Pi(N)$个指定事件将$(1,N)$分割成$\pi(N)$、$\Pi(N)$个间段，其中段长为x的间段，出现的平均频率、概率、实际个数及理论个数记为$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$、$\pi(N,x)$和$\Pi(N,x)$，则

$$\overline{\rho}(N,x) = \frac{\pi(N,x)}{\pi(N)} \quad , \quad \overline{P}(N,x) = \frac{\Pi(N,x)}{\Pi(N)} \quad (49)$$

同理，两段长为x间距是y的两相邻相同二生事件出现的个数，记为$\pi(N,x,y)$及

$\Pi(N,x,y)$

，因段长为$2x$的$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$个二生间段，将$(1,N)$内的试验分割成$\pi(N,x)$、$\Pi(N,x)$个间段，间距为y的相邻相同二生事件出现的平均频率及概率，记为$\overline{\rho}(N,x,y)$、$\overline{P}(N,x,y)$。

对$\overline{\rho}(N,x,y)$、$\overline{P}(N,x,y)$而言，当参数y在$(1,\infty)$内对这两个量求和，就得到二生事件出现的平均频率及概率$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$，即

$$\overline{\rho}(N,x)=\sum_{y=1}^{\infty}\overline{\rho}(N,x,y) \quad , \quad \overline{P}(N,x)=\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x,y)\,dy$$

因$\overline{P}(N,x,y)$仍具有正指性，由上式可将$\overline{P}(N,x,y)$表达如下

$$\overline{P}(N,x,y)=\overline{P}(N,x)\overline{P}(N,y) \quad , \quad \int_0^{\infty}\overline{P}(N,y)\,dy=1$$

同理，当参数x在$(1,\infty)$内，对这$\overline{\rho}(N,x)$、$\overline{P}(N,x)$和，就得到$(1,N)$内事件出现的平均个数$\overline{\pi}(N,x)$、$\overline{\Pi}(N,x)$，即

$$\overline{\pi}(N)=\sum_{x=1}^{\infty}\overline{\rho}(N,x)=\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\overline{\rho}(N,x,y)$$

$$\overline{\Pi}(N)=\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x)\,dx=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x,y)\,dydx$$

参考(49)式及上面几个表达式，得

$$\overline{\rho}(N,x,y)=\frac{\pi(N,x,y)}{\pi(N)} \quad , \quad \overline{P}(N,x,y)=\frac{\Pi(N,x,y)}{\Pi(N)} \tag{50}$$

$$\int^N P(t,x,y)\,dt=\Pi(N,x,y)=\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}\Pi(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(t,x,y)\Pi(t) \tag{51}$$

$(1,N)$内段长为x的二生事件平均段长，记为$\overline{y}$，则

$$\overline{y}=\frac{N}{\Pi(N,x)}=\int^{\infty} y\,P(N,x,y)\,dy$$

得本引理$P(N,x,y)$及$P(t,x,y)$等表达式(43)式、(44)式、(45)式及(46)式

段长是 $x+y$ 的试验组，乘以它在$(1,N)$内出现的次数$\pi(N,x,y)$或$\Pi(N,x,y)$，就是这种素数组，在(1，N)内的累计长度，记为$m(N,x,y)$及$M(N,x,y)$，

$$\begin{cases} m(N,x,y)=(2x+2y)\pi(N,x,y)=2(x+y)\overline{\rho}(N,x,y)\pi(N) \\ M(N,x,y)=(2x+2y)\Pi(N,x,y)=2(x+y)\overline{P}(N,x,y)\Pi(N) \end{cases} \quad (52)$$

注意：上式右边引用了(44)式

y的上边界记为$^{\uparrow}d(N,x)$，后面可证明

$$^{\uparrow}d(N,x)= \qquad (53)$$

对各种间距y的素数组$\pi(N,x,y)$、$\Pi(N,x,y)$的长度$m(N,x,y)$、$M(N,x,y)$求和，就得到(1，N)内的各种不同间距y的$x+y$事件组的总长度，记为$m(N,x)$或$M(N,x)$，由(52)式，得

$$m(N,x)=\sum_{y=1}^{^{\uparrow}d(N,x)} m(N,x,y)=\sum_{y=1}^{^{\uparrow}d(N,x)} 2(x+y)\overline{\rho}(N,x,y)\pi(N)=N$$

$$M(N,x)=\int^{\infty} m(N,x,y)\,dy=\int^{\infty} 2(x+y)\overline{P}(N,x,y)\Pi(N)\,dy=^{1} N$$

得(47)式、(48)式

定理 6　$t\le N$的自然数中，段长为$2x+2y$的相邻二生素数$(p,p+2x,p+2y,p+2x+2y)$出现的频率、概率及两者的平均值记为$\rho(t,x,y)$、$P(t,x,y)$、$\overline{\rho}(N,x,y)$、$\overline{P}(N,x,y)$，出现的个数记为$\pi(N,x,y)$、$\Pi(N,x,y)$， 它们正指性中，归一化的正态布函数记为$P_n(N,x,y)$，指数分布函数记为$P_e(N,x,y)$，两个变量$2x$、$2y$单独的分布函数记为$\rho(t,x)$、$P(t,y)$、$\overline{\rho}(t,x)$及$\overline{P}(t,y)$。其中，$2x$表示二生素数的段长，$2y$表示两个段长为$2x$的相邻二生素数的间距，注意“二生素数定理”中表

达式(13)：(20)式，则

$$\overline{P}(N,x,y)=^{1}\overline{P}(N,x)\overline{P}(N,y) \tag{54}$$

$$\overline{P}(N,y)=P_{n}(N,y)=\frac{2^{\pm}B_{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}(N,x)}\exp\left(\frac{-y^{2}}{2\sigma_{n}^{2}(N,x)}\right)\quad(y\le y_{m}) \tag{55}$$

$$\overline{P}(N,y)=P_{e}(N,y)=\frac{^{\pm}B_{e}}{\sigma_{e}(N,x)}\exp\left(-\frac{x}{\sigma_{e}(N,x)}\right)\quad(y_{m}\le y) \tag{56}$$

$$\frac{\sigma_{n}(N,x)}{\sigma_{e}(N,x)}=\left(\frac{^{1}2\pi(N)}{N}\right)\div\left(\frac{^{1}4\pi(N)}{\sqrt{2\pi}\,N}\right)=^{1}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}=\frac{^{\pm}1}{0.7979} \tag{59}$$

$$\sigma_{n}(N,x)=\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi\ln^{2}N}{^{\pm}4^{2}B_{n}C_{n}}\exp\left(\frac{4x^{2}}{\pi\ln^{2}N}\right)-x\right]\quad\begin{pmatrix}x\le x_{m}\\ y\le y_{m}\end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\sigma_{n}(N,x)=^{\pm}\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^{2}N}{8B_{n}C_{e}}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\quad\begin{pmatrix}x_{m}\le x\\ y\le y_{m}\end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\sigma_{e}(N,x)=\frac{^{\pm}\pi\ln^{2}N}{8B_{e}C_{n}}\exp\left(\frac{4x^{2}}{\pi\ln^{2}N}\right)-x\quad\begin{pmatrix}x\le x_{m}\\ y_{m}\le y\end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\sigma_{e}(N,x)=\frac{^{\pm}\ln^{2}N}{4B_{e}C_{e}}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\quad\begin{pmatrix}x_{m}\le x\\ y_{m}\le y\end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\overline{P}(N,x,y)=\begin{cases}P_{n,n}(N,x,y)=^{\pm}2B_{n}P_{n,n}(N,x,y)_{0} & (x\le x_{m},y\le y_{m})\\ P_{n,e}(N,x,y)=^{\pm}B_{e}P_{n,e}(N,x,y)_{0} & (x\le x_{m},y_{m}\le y)\end{cases} \tag{64}$$

$$=\begin{cases}P_{n}(N,x)P_{n}(N,y)=\dfrac{^{\pm}P_{n}(N,x)2B_{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{n}(N,x)}\exp\left(\dfrac{-y^{2}}{2\sigma_{n}^{2}(N,x)}\right) & \begin{pmatrix}x\le x_{m}\\ y\le y_{m}\end{pmatrix}\\ P_{n}(N,x)P_{e}(N,y)=\dfrac{^{\pm}P_{n}(N,x)B_{e}}{\sigma_{e}(N,x)}\exp\left(-\dfrac{y}{\sigma_{e}(N,x)}\right) & \begin{pmatrix}x\le x_{m}\\ y_{m}\le y\end{pmatrix}\end{cases} \tag{65}$$

$$P_{n,n}(N,x,y)=\frac{^{\pm}4^{3}B_{n}^{2}C_{n}^{2}}{\pi^{3}\ln^{3}N}\exp\left(\frac{-4x^{2}}{\pi\ln^{2}N}\right)\left[\exp\left(\frac{4x^{2}}{\pi\ln^{2}N}\right)-\frac{^{\pm}4^{2}B_{n}C_{n}}{\pi\ln^{2}N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^{2}}{2}\left(\frac{^{\pm}4^{2}B_{n}C_{n}}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^{2}N}\right)^{2}\left[\exp\left(\frac{4x^{2}}{\pi\ln^{2}N}\right)-\frac{^{\pm}4^{2}B_{n}C_{n}}{\pi\ln^{2}N}x\right]^{-2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x\le x_{m}\\ y\le y_{m}\end{pmatrix} \tag{66}$$

$$=\frac{^{\pm}4^{3}B_{n}^{2}C_{n}^{2}}{\pi^{3}\ln^{3}N}\exp\left\{\frac{-y^{2}}{2}\left(\frac{^{\pm}4^{2}B_{n}C_{n}}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^{2}N}\right)^{2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x\le x_{m}\\ y\le y_{m}\end{pmatrix},\ \frac{x}{\ln N}=1 \tag{67}$$

$$P_{n,e}(N,x,y)=\frac{^{\pm}4C_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)^{\pm}B_e\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}\right\}\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{68}$$

$$=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m, & \dfrac{x}{\ln N}=1\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{69}$$

$$\overline{P}(N,x,y)=\begin{cases}P_{e,n}(N,x,y)={}^{\pm}2B_nP_{e,n}(N,x,y)_0 & (x_m\le x, y\le y_m)\\ P_{e,e}(N,x,y)={}^{\pm}B_eP_{e,e}(N,x,y)_0 & (x_m\le x, y_m\le y)\end{cases}\tag{70}$$

$$=\begin{cases}P_e(N,x)P_n(N,y)=\dfrac{^{\pm}P_e(N,x)2B_n}{\sqrt{2\pi}\sigma_n(N,x)}\exp\left(\dfrac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right) & \begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\\ P_e(N,x)P_e(N,y)=\dfrac{^{\pm}P_e(N,x)B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\dfrac{y}{\sigma_e(N,x)}\right) & \begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\end{cases}\tag{71}$$

$$P_{e,n}(N,x,y)=\frac{^{\pm}16B_n^2C_e^2}{\pi\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{72}$$

$$P_{e,e}(N,x,y)=\frac{^{\pm}8B_e^2C_e^2}{\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{73}$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}P_{n,n}(N,x,y)\Pi(N)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{74}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}P_{n,n}(t,x,y)\Pi(t)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{75}$$

$$P(N,x,y)=\frac{\partial}{\partial N}P_{n,e}(N,x,y)\Pi(N)\quad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{76}$$

$$P\left(t,x,y\right)=\frac{\partial}{\partial t}P_{n,\,e}\left(t,x,y\right)\Pi\left(t\right)\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{77}$$

$$P\left(N,x,y\right)=\frac{\partial}{\partial N}P_{e,\,n}\left(N,x,y\right)\Pi\left(N\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{78}$$

$$P\left(t,x,y\right)=\frac{\partial}{\partial t}P_{e,\,n}\left(t,x,y\right)\Pi\left(t\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{79}$$

$$P\left(N,x,y\right)=\frac{\partial}{\partial N}P_{e,\,e}\left(N,x,y\right)\Pi\left(N\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{80}$$

$$P\left(t,x,y\right)=\frac{\partial}{\partial t}P_{e,\,e}\left(t,x,y\right)\Pi\left(t\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{81}$$

注意　此处的$P\left(N,y\right)$函数，是描述相邻间段之间的间距y，对$P\left(N,x,y\right)$函数影响的概率，$P\left(N,y\right)$仍然隐含x变量，即变量x对$P\left(N,y\right)$是有作用的，但为了与$P\left(N,x,y\right)$区别，不便在$P\left(N,y\right)$中显含变量x，同理y_m也隐含x变量

$$\pi\left(N,x,y\right)=^{1}\Pi\left(N,x,y\right)=^{1}\overline{P}\left(N,x,y\right)\Pi\left(N\right)$$

$$=\frac{^{\pm}4^3B_n^2C_n^2}{\pi^2\ln^4N}N\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2N}\right)^2\right\}\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix},\frac{x}{\ln N}=1\tag{82}$$

$$=\frac{^{\pm}32B_nB_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4N}N\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2N}\right)\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix},\frac{x}{\ln N}=1\tag{83}$$

$$=P_{e,n}\left(N,x,y\right)\frac{^{\pm}2C_e}{\ln^2N}N\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}\tag{84}$$

$$=P_{e,\,e}\left(N,x,y\right)\frac{^{\pm}2C_e}{\ln^2N}N\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}\tag{85}$$

$$y_m=^{1}\frac{\sigma_n^2\left(N,x\right)}{\sigma_e\left(N,x\right)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\tag{86}$$

$$=\frac{\pi^3\ln^3N}{32^{\pm}C_n^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{8x^2}{\pi\ln^2N}\right)\qquad\left(x\le x_m\right)\tag{87}$$

$$y_m=^{1}\frac{\sigma_n^2\left(N,x\right)}{\sigma_e\left(N,x\right)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\tag{88}$$

$$=\frac{\pi\ln^3 N}{16^{\pm}C_e^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{4x}{\ln N}\right)\quad\left(x_m\le x\right)\tag{89}$$

其中 $\sigma_n(N,x)$ 及 $\sigma_e(N,x)$ 是正态及指数分布的均方差；y_m 是正态及指数分布的分界点；${}^{\pm}B_n$ 或 ${}^{\pm}B_e$ 是同阶函数形式的标准概率分布系数，以标准的正态分布或指数分布为权，在两相邻间段间距 y 的定义域内，对 ${}^{\pm}B_n$ 或 ${}^{\pm}B_e$ 进行加权平均的值等于 1

$${}^{\pm}\overline{B}_n={}^{\pm}\overline{B}_e=1\tag{90}$$

$${}^{\pm}B=\frac{{}^{1}\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_n(N)}{2}\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right)\quad\left(y\le y_m\right)\tag{91}$$

$${}^{\pm}B=\frac{{}^{1}\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\sigma_e(N)\exp\left(\frac{x}{\sigma_e(N)}\right)\quad\left(y_m\le y\right)\tag{92}$$

证明　与“二生事件定理”一节情况相似：低端趋近正态分布，高端趋近指数分布，中端两种分布均接近.，故在中端，以正指分布的等值点 y_m 为界，低端用正态分布，高端用指数分布,分别单独用 $\overline{\rho}(N,x,y)$ 近似描述，概率分布函数 $\overline{P}(N,x,y)$

$\overline{P}(N,x)$ 与 $\overline{P}(N,x,y)$ 的异同分析：两者都具有正指性；x 、y 的正指分布等值点表分别为 x_m 、y_m；$\overline{P}(N,x)$ 是关于 x 归一化的函数

$$\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x)\,dx=1$$

$\overline{P}(N,x,y)$ 是关于 y 归 $\overline{P}(N,x)$ 化的函数

$$\int_0^{\infty}\overline{P}(N,x,y)\,dy=\overline{P}(N,x)$$

$\overline{P}(N,x)$ 的均方差仅与 N 有关，表为 $\sigma_n(N)$ 、$\sigma_e(N)$；$\overline{P}(N,x,y)$ 的均方差与 N 及 x 有关，表为 $\sigma_n(N,x)$ 、$\sigma_e(N,x)$

仿照 (8) ：(13) 式及上面的分析，由 (43) 式可将 $\overline{P}(N,x,y)$ 表为 (64) 式

$P_n(N,y)$ 、$P_e(N,y)$ 的表达式与 $P_n(N,x)$ 、$P_e(N,x)$ 相似，只需在 (9) 式、

(10) 式中，将 x 用 y 代替等，即可得 (55) 式、(56) 式

由 (55) 式、(56) 式代入 (64) 式得 (65) 式

$$P_n(N,x,y) =^1 \overline{P}(N,x) P_n(N,y) = 2^{\pm} B_n P_n(N,x,y)_0$$

$$= \overline{P}(N,x) \frac{2^{\pm} B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)} \right) \quad (y \le y_m) \tag{94}$$

$$P_e(N,x,y) =^1 \overline{P}(N,x) P_e(N,y) =^{\pm} B_e P_e(N,x,y)_0$$

$$= \overline{P}(N,x) \frac{^{\pm} B_e}{\sigma_e(N,x)} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)} \right) \quad (y_m \le y) \tag{95}$$

用 (94) 式表达的 $P_n(N,x,y)$ 近似代替 (48) 式中的 $\overline{P}(N,x,y)$，从而近似计算 $\sigma_n(N,x)$ 的值得

$$M(N,x) = \int_{\pm 0}^{\infty} 2(x+y) \frac{2^{\pm} B_n \overline{P}(N,x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)} \right) \Pi(N)\, dy =^1 N$$

整理上式得

$$\frac{M(N,x)}{4B_n \overline{P}(N,x)\Pi(N)} = \frac{^1 N}{4B_n \overline{P}(N,x)\Pi(N)} =^{\pm} \int_{\pm 0}^{\infty} \frac{x+y}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)} \right) dy$$

$$= \int_{\pm 0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)} \right) \frac{dy}{\sigma_n(N,x)} + \int_{\pm 0}^{\infty} \frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)} \right) \frac{dy^2}{\sigma_n^2(N,x)}$$

$$= \int_{\pm 0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2} \right) du + \int \frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v)\, dv$$

$$= x - \frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v) \Big|_{v=^{\pm} 0}^{v=\infty} = x + \frac{\sigma_n(N,x)}{\sqrt{2\pi}}$$

则

$$\sigma_n(N,x) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{^1 N}{4B_n \overline{P}(N,x)\Pi(N)} - x \right) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{^1 \ln N}{4^{\pm} B_n \overline{P}(N,x)} - x \right) \tag{96}$$

由 (13) 式代入上面 (96) 式得

$$\sigma_n(N,x)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^1\ln N}{4^{\pm}B_n\overline{P}(N,x)}-x\right)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^1\ln N}{4^{\pm}B_nP_n(N,x)}-x\right)$$

$$=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{\ln N}{4^{\pm}B_n}\left[\frac{4^{\pm}C_n}{\pi\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\right]^{-1}-x\right\}$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi\ln^2 N}{{}^{\pm}4^2B_nC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

得(60)式

由(14)式代入(96)式得

$$\sigma_n(N,x)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^1\ln N}{4^{\pm}B_n\overline{P}(N,x)}-x\right)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{{}^1\ln N}{4^{\pm}B_nP_e(N,x)}-x\right)\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{\ln N}{4^{\pm}B_n}\left[\frac{2^{\pm}C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\right]^{-1}-x\right\}\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{{}^{\pm}8B_nC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\qquad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

得(61)式

同理，用(95)式中的 $P_e(N,x,y)$ 近似代替(48)式中的 $\overline{P}(N,x,y)$，从而近似计算 $\sigma_e(N,x)$ 的值，得

$$M(N,x)=\int_{\pm 0}^{\infty}2(x+y)\frac{{}^{\pm}B_e\overline{P}(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Pi(N)\,dy={}^1\,N\qquad(y_m\le y)$$

整理上式，得

$$\frac{M(N,x)}{2B_e\overline{P}(N,x)\Pi(N)}=\frac{{}^{\pm}N}{2B_e\overline{P}(N,x)\Pi(N)}={}^{\pm}\int_{\pm 0}^{\infty}\frac{x+y}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)dy\qquad(y_m\le y)$$

$$=-{}^{\pm}\int_{\pm 0}^{\infty}(x+y)\,d\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)=-{}^{\pm}(x+y)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Bigg|_{y=\pm 0}^{y=\infty}+\int_{\pm 0}^{\infty}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)dy$$

$$=-{}^{\pm}(x+y)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Bigg|_{y=\pm 0}^{y=\infty}+\int_{\pm 0}^{\infty}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)dy$$

$$=^{\pm}x-\sigma_e(N,x)\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\Bigg|_{y={}^{\pm}0}^{y=\infty}=^{\pm}x+\sigma_e(N,x)$$

将上式移项，得

$$\sigma_e(N,x)=\frac{^{\pm}N}{2B_e\overline{P}(N,x)\Pi(N)}-x=\frac{^{\pm}\ln N}{2B_e\overline{P}(N,x)}-x \qquad (y_m\le y) \qquad (97)$$

由(13)式代入上式(97)式，得

$$\sigma_e(N,x)=\frac{\ln N}{^{\pm}2B_eP_n(N,x)}-x=\frac{\ln N}{^{\pm}2B_e}\left[\frac{4^{\pm}C_n}{\pi\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\right]^{-1}-x \qquad \begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\pi\ln^2 N}{^{\pm}8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x \qquad \begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

得(62)式

由(14)式代入(97)式得

$$\sigma_e(N,x)=\frac{\ln N}{2^{\pm}B_eP_e(N,x)}-x=\frac{\ln N}{2^{\pm}B_e}\left[\frac{2^{\pm}C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\right]^{-1}-x$$

$$=\frac{^{\pm}\ln^2 N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x \qquad \begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

得(63)式

既然归一化的$P_n(N,y)$及$P_e(N,y)$

$$\int_0^\infty P_n(N,y)\,dy=\int_0^\infty 2^{\pm}B_nP_n(N,y)_0\,dy=1$$

$$\int_0^\infty P_e(N,y)\,dy=\int_0^\infty {}^{\pm}B_eP_e(N,y)_0\,dy=1$$

分别接近于标准的正态分布$P_n(N,y)_0$的两倍， 或指数 分布$P_e(N,y)_0$，将$^{\pm}B_n$以标准正态分布函数$P_n(N,x)_0$为权，在间距y的定义域内进行加权平均值表为$^{\pm}\overline{B}_n$，或将$^{\pm}B_e$以指数分布函数$P_e(N,y)_0$为权，在间距y的定义域内进行加权平均值表为$^{\pm}\overline{B}_e$，则

$$^{\pm}\overline{B}_n=\frac{\int_{\pm 0}^{\infty}2^{\pm}B_nP_n(N,y)_0\,dy}{\int_{\pm 0}^{\infty}P_n(N,y)_0\,dy}=\int_0^\infty P_n(N,y)\,dy=1$$

$$^{\pm}\overline{B_e}=\frac{\int_{\pm 0}^{\infty}{}^{\pm}B_e P_e\left(N,y\right)_0 dy}{\int_{\pm 0}^{\infty}P_e\left(N,y\right)_0 dy}=\int_0^{\infty}P_e\left(N,y\right)dy=1$$

即：$^{\pm}\overline{B_n}$ 或 $^{\pm}\overline{B_e}$ 均等于 1 得 (90) 式

由(13) 式、(55) 式及(60) 式，得

$$\overline{P}(N,x,y)=P_{n,n}(N,x,y)=P_n(N,x)P_n(N,y)\qquad\left(x\le x_m\ ,\ y\le y_m\right)$$

$$=\frac{4^{\pm}C_n}{\pi\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)$$

$$=\frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi\ln^2 N}{^{\pm}4^2B_nC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi\ln^2 N}{^{\pm}4^2B_nC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-x\right]\right)^{-2}\right\}$$

$$=\frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\frac{\pi\ln^2 N}{^{\pm}4^2B_nC_n}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\frac{\pi\ln^2 N}{^{\pm}4^2B_nC_n}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]\right)^{-2}\right\}\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

$$=\frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi\ln^2 N}\right)-\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

$$=\frac{8^{\pm}B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\ \exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2B_nC_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\right\}\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m & , & \dfrac{x}{\ln N}=1\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

整理上式得(66) 式、(67) 式

同理，由(13) 式、(56) 式及(62) 式，得

$$\overline{P}(N,x,y)=P_{n,e}(N,x,y)=P_n(N,x)P_e(N,y)\qquad\begin{pmatrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

$$= P_n(N,x)\frac{{}^{\pm}B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right) \quad \begin{pmatrix} x \le x_m \\ y_m \le y \end{pmatrix}$$

$$=^1 \frac{4^{\pm}C_n}{\pi \ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right){}^{\pm}B_e\left[\frac{{}^{\pm}\pi \ln^2 N}{8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)-x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\left[\frac{{}^{\pm}\pi \ln^2 N}{8B_eC_n}\exp\left(\frac{4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)-x\right]^{-1}\right\} \quad \begin{pmatrix} x \le x_m \\ y_m \le y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{{}^{\pm}4C_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(\frac{-4x^2}{\pi \ln^2 N}\right){}^{\pm}B_e\frac{8B_eC_n}{\pi \ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi \ln^2 N}x\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{8B_eC_n}{\pi \ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{4x^2}{\pi \ln^2 N}\right)-\frac{8B_eC_n}{\pi \ln^2 N}x\right]^{-1}\right\} \quad \begin{pmatrix} x \le x_m \\ y_m \le y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{{}^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi \ln^2 N}\right) \quad \begin{pmatrix} x \le x_m, & \dfrac{x}{\ln N} = 1 \\ y_m \le y & \end{pmatrix}$$

整理上式得(68)式、(69)式

同理，由(14)式、(61)式及(94)式，得

$$\overline{P}(N,x,y) = P_{e,n}(N,x,y) =^1 \frac{2^{\pm}B_nP_e(N,x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right) \quad \begin{pmatrix} x_m \le x \\ y \le y_m \end{pmatrix}$$

$$=^1 \frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{\pm}C_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\left[\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]\right)^{-2}\right\}$$

$$= \frac{{}^{\pm}4B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\sqrt{2\pi}\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\sqrt{2\pi}\frac{\ln^2 N}{8B_nC_e}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right)^{-2}\right\}$$

$$= \frac{{}^{\pm}4B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln N}\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}$$

$$=\frac{^{\pm}16B_n^2C_e^2}{\pi\ln^3 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left\{\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]\right\}^{-1}$$

$$\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{8B_nC_e}{\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-\frac{8B_nC_e}{\ln^2 N}x\right]^{-2}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y\le y_m\end{pmatrix}$$

得(72)式

同理，由(14)式、(63)式、(64)式及(95)式，得

$$\overline{P}(N,x,y)=P_{e,e}(N,x,y)=P_e(N,x)P_e(N,y)$$

$$=\frac{^{\pm}B_eP_e(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_e(N,x)}\right)\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2^{\pm}B_eC_e}{\ln N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left[\frac{^{\pm}\ln^2 N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]^{-1}\exp\left\{-y\left[\frac{^{\pm}\ln^2 N}{4B_eC_e}\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\right]^{-1}\right\}$$

$$=\frac{^{\pm}2B_eC_e}{\ln N}\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\exp\left(-\frac{2x}{\ln N}\right)\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}$$

$$\exp\left\{-y\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\left[\exp\left(\frac{2x}{\ln N}\right)-x\frac{4B_eC_e}{\ln^2 N}\right]^{-1}\right\}\quad\begin{pmatrix}x_m\le x\\ y_m\le y\end{pmatrix}$$

整理上式得(73)式

$P(N,x,y)$的值因$2x$、$2y$的分布区间，可表达成(74)到(81)式

由(45)式、(46)式、(65)式，得

$$P(N,x,y)=\frac{\partial\overline{P}(N,x,y)\Pi(N,y)}{\partial N}=\frac{\partial P_{n,n}(N,x,y)\Pi(N)P_n(N,x)}{\partial N}$$

$$P(t,x,y)=\frac{\partial P_{n,n}(t,x,y)\Pi(t)P_n(t,x)}{\partial t}$$

得(74)式、(75)式

由 (44) 式、(64) 式及(67) 式，得

$$\pi(N,x,y) =^1 \Pi(N,x,y) =^1 \overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$=^1 P_{n,n}(N,x,y)\Pi(N) \qquad (x \le x_m\ ,\ y \le y_m)$$

$$= \frac{^{\pm}4^3 B_n^2 C_n^2}{\pi^2 \ln^3 N} \exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2 B_n C_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\right\}\frac{N}{\ln N} \qquad \left(\begin{matrix} x \le x_m \\ y \le y_m \end{matrix}\ ,\ \frac{x}{\ln N} = 1\right)$$

$$= \frac{^{\pm}4^3 B_n^2 C_n^2}{\pi^2 \ln^4 N} N\exp\left\{\frac{-y^2}{2}\left(\frac{^{\pm}4^2 B_n C_n}{\pi\sqrt{2\pi}\ln^2 N}\right)^2\right\} \qquad \left(\begin{matrix} x \le x_m \\ y \le y_m \end{matrix}\ ,\ \frac{x}{\ln N} = 1\right)$$

得(82) 式

由 (44) 式、(64) 式及(69) 式，得

$$\pi(N,x,y) =^1 \Pi(N,x,y) =^1 \overline{P}(N,x,y)\Pi(N)$$

$$=^1 P_{n,e}(N,x,y)\Pi(N) \qquad (x \le x_m\ ,\ y_m \le y)$$

$$= \frac{^{\pm}32 B_n B_e^2 C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^3 N}\exp\left(-y\frac{8B_e C_n}{\pi\ln^2 N}\right)\frac{N}{\ln N} \qquad \left(\begin{matrix} x \le x_m \\ y_m \le y \end{matrix}, \frac{x}{\ln N} = 1\right)$$

$$= \frac{^{\pm}32 B_n B_e^2 C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N} N\exp\left(-y\frac{8B_e C_n}{\pi\ln^2 N}\right) \qquad \left(\begin{matrix} x \le x_m \\ y_m \le y \end{matrix}, \frac{x}{\ln N} = 1\right)$$

得(83) 式

由 (44) 式、(70) 式及(71) 式，得

$$\pi(N,x,y) =^1 \Pi(N,x,y) =^1 \overline{P}(N,x,y)\Pi(N)\overline{P}(N,x)$$

$$=^1 P_{e,n}(N,x,y)\Pi(N) \qquad (x_m \le x,\ y \le y_m)$$

整理上式，得(84) 式，其中 $P_{e,n}(N,x,y)$ 由(72) 式给出

同理，由 (44) 式、(70) 式及(71) 式，得

$$\pi(N,x,y) =^1 \Pi(N,x,y) =^1 \overline{P}(N,x,y)\Pi(N)\overline{P}(N,x)$$

$$=^1 P_{e,e}(N,x,y)\Pi(N) \qquad (x_m \le x,\ y_m \le y)$$

整理上式得(85) 式，其中 $P_{e,e}(N,x,y)$ 由(73) 式给出

间距y等于y_m的点，是$\overline{P}(N,y_m)$的正态分布$P_n(N,y_m)$与指数分布$P_e(N,y_m)$的等值点，由(55)式、(56)式，得

$$P_n(N,y_m)=\frac{2^{\pm}B_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y_m^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)$$

$$=P_e(N,y_m)=\frac{^{\pm}B_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y_m}{\sigma_e(N,x)}\right)$$

对上式两边取平均得

$$\frac{2^{\pm}\overline{B}_n}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y_m^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)=\frac{^{\pm}\overline{B}_e}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y_m}{\sigma_e(N,x)}\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}\exp\left(\frac{-y_m^2}{2\sigma_n^2(N,x)}\right)=\frac{^{1}1}{\sigma_e(N,x)}\exp\left(-\frac{y_m}{\sigma_e(N,x)}\right)$$

两边取对数并移项得

$$\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}-\frac{y_m^2}{2\sigma_n^2(N,x)}=^{\pm}\varepsilon-\ln\sigma_e(N,x)-\frac{y_m}{\sigma_e(N,x)}$$

整理上式得

$$\frac{y_m^2}{2\sigma_n^2(N,x)}-\frac{y_m}{\sigma_e(N,x)}+^{\pm}\varepsilon=\ln\sigma_e(N,x)+\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}$$

$$=\ln\frac{2\sigma_e(N,x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N,x)}=\ln\frac{2}{\pi}=-\ln\frac{\pi}{2}$$

$$y_m=\sigma_n^2(N,x)\left(\frac{1}{\sigma_e(N,x)}\pm\sqrt{\frac{1}{\sigma_e^2(N,x)}-\frac{1}{\sigma_n^2(N,x)}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\sigma_e^2(N,x)}{\sigma_n^2(N,x)}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=^{1}\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)=^{1}\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)$$

因$2y_m$在中端，上式应取正号，将$\sigma_n(N,x)$、$\sigma_e(N,x)$分别代入上式，得

$$y_m=^{1}\frac{\sigma_n^2(N,x)}{\sigma_e(N,x)}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)=^{1}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\sigma_n(N,x)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\quad\frac{\pi^2\ln^3 N}{16^{\pm}C_n^2}\exp\left(\frac{8x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\qquad(x\le x_m)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\quad\frac{\ln^3 N}{4^{\pm}C_e^2}\exp\left(\frac{4x}{\ln N}\right)\qquad(x_m\le x)$$

$$=\frac{\pi^3\ln^3 N}{64^{\pm}C_n^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{8x^2}{\pi\ln^2 N}\right)\qquad(x\le x_m)$$

$$=\frac{\pi\ln^3 N}{16^{\pm}C_e^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}}\right)\exp\left(\frac{4x}{\ln N}\right)\qquad(x_m\le x)$$

得定理中 y_m 的表达式 (86)：(89) 式

可将标准概率分布系数 $^{\pm}B_n$ 和 $^{\pm}B_e$ 统一用 $^{\pm}B$ 表达如下

$$^{\pm}B=\begin{cases}^{\pm}B_n=\dfrac{^{1}\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\dfrac{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n(N)}{2}\exp\left(\dfrac{x^2}{2\sigma_n^2(N)}\right) & (y\le y_m)\\[2ex] ^{\pm}B_e=\dfrac{^{1}\pi(N,x,y)}{P(N,x)\pi(N,x)}\sigma_e(N)\exp\left(\dfrac{x}{\sigma_e(N)}\right) & (y_m\le y)\end{cases}$$

得定理中 $^{\pm}B$ 的表达式 (91) 式、(92) 式

7. 4.3 相邻孪生事件定理

四个事件 $(A,p+2,p+6,p+8)$ 构成的相邻孪生事件——最相邻孪生事件，是相邻二生事件的一个特例。同时，它又是最密四生事件

定理 7 不大于 N 的最相邻孪生事件的个数——最相邻孪生事件定理，记为 $\pi(N,1,2)_2$ 或 $\pi(N)_4$，则

$$\pi(N,1,2)_2=\pi(N)_4=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}N={}^{\pm}B_e^2C_n^2\frac{1.2935N}{\ln^4 N}\quad(1=N)\qquad(98)$$

$$B_e^2C_n^2=\frac{^{\pm}\pi(N,1,2)_2\ln^4 N}{1.2935N}\quad(1=N)\qquad(99)$$

其中 $B_e^2C_n^2$ 是几个系数构成的同阶函数

证明 此相邻孪生事件是段长为 $2x=2$，间距为 $2y=4$ 的相邻相同二生事件，由 (83) 式

计算$\pi(N,1,2)_2$的值，得

$$\pi(N,1,2)_2=\pi(N,x,y)\Big|_{x=1}^{y=2}=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}N\exp\left(-y\frac{8B_eC_n}{\pi\ln^2 N}\right)$$

$$=\frac{^{\pm}32B_e^2C_n^2}{\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}N={}^{\pm}B_e^2C_n^2\frac{1.2935N}{\ln^4 N}\qquad\left(\begin{matrix}x\le x_m\\ y_m\le y\end{matrix},\frac{x}{\ln N}=1=N\right)$$

整理得(98)式。由上式移项得

$$B_e^2C_n^2=\frac{^{\pm}\pi(N,1,2)_2\pi^2\sqrt{2\pi}\ln^4 N}{32N}=\frac{^{\pm}\pi(N,1,2)_2\ln^4 N}{1.2935N}\qquad(1=N)$$

得(99)式

$\pi(N,1,2)_2$是形如$(p,p+2,p+6,p+8)$的最密四生素数在 N 内的个数,是从附 3 数据表中整理获得：如 $(11,13,17,19)$，$(101,103,107,109)$、$(191,193,197,199)$、$(191,193,197,199)$等

谢谢东陆论坛的网友豆豆在下面网址编程计算出最相邻孪生素数组的数据，并整理成下面数据表
（http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=7944&Forum_ID=7）

表 7.14 10^n 内最相邻孪生素数组定理$\pi(10^n,1,2)$数据表

n	$\pi(10^n,1,2)$	$B_e^2C_n^2$
2	1	3.474
3	4	7.0408
4	11	6.1196
5	37	5.0254
6	165	4.6472
7	898	4.6856

上表数据中显示 $B_e^2C_n^2$ 的值随 N 值增大，波动逐渐减小，支持理论结果：$B_e^2C_n^2$ 是一个有渐近值——极限的量

注：表 7.14 10^n 内最相邻孪生素数组的个数$\pi(10^n,1,2)$数据表，就是表 7.12 10^7 内最密四生事件 $p,p+2,p+6,p+8$ 定理$\pi(N,{}^{\downarrow}\langle d_3\rangle)$数据表，即用两种思路获得了同一个定理

7. 4.4 相邻二生素数最小最大间距

计算原理与“二生素数的最小最大间距”一节相似， 这里$\overline{P}(N,y)$的作用，与$\overline{P}(N,x)$相似、$\sigma(N,x)$的作用与$\sigma(N)$相似等。

注意　“边界”一章中频率的定义域是自然数，这里的边界$2^{\downarrow}d(N,x)$、$2^{\uparrow}d(N,x)$、$2^{\downarrow}D(N,x)$、$2^{\uparrow}D(N,x)$等的定义域是偶数

定理 8 在自然数$(1,N)$内，两段长均为$2x$、相距为$2y$的相邻二生素数，出现频率、概率及个数，记为$\rho(N,x,y)$、$P(N,x,y)$、$\pi(N,x,y)$、$\Pi(N,x,y)$。间距$2y$的最小最大值，即平均值定义域边界，表为$^{\downarrow}2d(N,x)$、$2^{\uparrow}d(N,x)$、$2^{\downarrow}D(N,x)$、$2^{\uparrow}D(N,x)$，则

$$\begin{cases} 2^{\downarrow}D(N,x) =^{\pm} 0 \\ ^{\downarrow}2d(N,x) = 4 \end{cases} \tag{100}$$

第十二章 新证已有定理

概率素数论有时还能解决素数论中，已用其它方法解决了的问题，能给出相同或等价的结果。虽新方法与过去的旧方法各有长短，如能把新旧方法结合，不排除产生更好方法的可能。后一想法不在现在讨论，前一问题举例如下

定理 1 $$\left|\sum_{p\le\xi}\frac{\ln p}{p}-\ln\xi\right|<C_1 \quad {}^{[1]\,P103} \qquad (1)$$

证明 $$\sum_{p\le\xi}\frac{\ln p}{p}=^{1}\int^{\xi}\frac{\ln t}{t}P(t)\,dt=^{1}\int^{\xi}\frac{\ln t}{t}d\Pi(t)$$

$$=^{1}\int^{\xi}\frac{\ln t}{t}d\left(\int^{t}\frac{dx}{\ln x}\pm^{1}\sqrt{2t\ln\ln t}\right)=^{1}\int^{\xi}\frac{\ln t}{t}\frac{dt}{\ln t}\pm^{1}\int^{\xi}\frac{\ln t}{t}\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}dt$$

$$=^{1}\ln\xi\pm^{1}\int^{\xi}\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}d\ln^{2}t=^{1}\ln\xi\pm^{1}\sqrt{\frac{2\ln\ln\xi}{\xi}}\ln^{2}\xi+C$$

则

$$\left|\sum_{p\le\xi}\frac{\ln p}{p}-\ln\xi\right|=\left|\sum_{p\le\xi}\frac{\ln p}{p}-^{1}\ln\xi C+\left({}^{1}1-1\right)\ln\xi\right|$$

$$<\left|\sum_{p\le\xi}\frac{\ln p}{p}-^{1}\ln\xi\right|+\left|\left({}^{1}1-1\right)\ln\xi\right|<^{1}\sqrt{\frac{2\ln\ln\xi}{\xi}}\ln^{2}\xi+C<C_1$$

定理 2 $$\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p}=\ln\ln\xi+^{\pm}C \quad {}^{[1]\,P105} \qquad (2)$$

证明 $$\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p}=^{1}\int^{\xi}\frac{P(t)\,dt}{t}=^{1}\int^{\xi}\frac{d\Pi(t)}{t}$$

$$=^{1}\int^{\xi}\frac{1}{t}d\left(\int^{t}\frac{dx}{\ln x}\pm^{1}\sqrt{2t\ln\ln t}\right)=^{1}\int^{\xi}\frac{1}{t}\frac{dt}{\ln t}\pm^{1}\int^{\xi}\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}dt$$

$$=^{1}\ln\ln\xi\pm^{1}\int^{\xi}\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}d\ln t=^{1}\ln\ln\xi\pm^{1}\sqrt{\frac{2\ln\ln\xi}{\xi}}\ln\xi+C$$

则

$$\left|\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p}-\ln\ln\xi\right|=\left|\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p}-^{1}\ln\ln\xi+\left({}^{1}1-1\right)\ln\ln\xi\right|$$

$$<\left|\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p}-^{1}\ln\ln\xi\right|+\left|\left(^{1}1-1\right)\ln\ln\xi\right|<^{1}\sqrt{\frac{2\ln\ln\xi}{\xi}}\ln\xi+C=C_1$$

引理 1 $\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\right)$ [6] P211

定理 3 $$\prod_{p\le\xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{^{1}C_{12}}{\ln\xi}\left[1+O\left(2\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}\right)\right] \quad \text{[1] P107} \tag{3}$$

证明 $$\ln\prod_{p\le\xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{p\le\xi}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=^{1}\int^{\xi}\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)P(t)\,dt$$

$$=-^{1}\int^{\xi}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{nt^n}+\cdots\cdots\right)d\Pi(t)$$

$$=-^{1}\int^{\xi}\left[\frac{1}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]d\left(\int^{t}\frac{dx}{\ln x}\pm^{1}\sqrt{2t\ln\ln t}\right)$$

$$=-^{1}\int^{\xi}\left[\frac{1}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]\frac{dt}{\ln t}\pm^{1}\int^{\xi}\left[\frac{1}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}dt$$

$$=-^{1}\ln\ln\xi+O\left(\frac{1}{t\ln t}\right)+C\pm^{1}2\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}$$

$$=^{1}\ln\frac{1}{\ln\xi}+C\pm^{1}2\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}=^{1}\ln\frac{C_{12}}{\ln\xi}\pm^{1}2\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}$$

$$\prod_{p\le\xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\exp\left(^{1}\ln\frac{C_{12}}{\ln\xi}\pm^{1}2\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}\right)=\frac{^{1}C_{12}}{\ln\xi}\exp\left(\pm^{1}2\sqrt{\frac{2\ln\ln t}{t}}\right)$$

与现有定理 [1] P107

$$\prod_{p\le\xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{C_{12}}{\ln\xi}+O\left(\frac{1}{\ln^2\xi}\right)$$ [1] P107

等价，证毕

素数倒数之和的值

定理 4 素数 $p\le x$ 的倒数和，实际值及理论值分别记为 $m(1,x)$ 、 $M(1,x)$ ，则

$$m(1,x)=\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=^{1}M(1,x)=^{1}\ln\ln x+^{\pm}C \quad (1=x) \tag{4}$$

证明　这虽是一个已有定理，但用本法计算更简洁易懂

$$m(1,x)=\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{t\le x}\frac{1}{t}\left(\pi(t)-\pi(t-1)\right)=^{1}\sum_{t\le x}\frac{1}{t}\left(\Pi(t)-\Pi(t-1)\right)=^{1}\sum_{t\le x}\frac{P(t)}{t}$$

或直接用

$$m(1,x)=\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=^{1}\sum_{t\le x}\frac{P(t)}{t}=^{1}\int^{x}\frac{P(t)}{t}dt=^{1}\int^{x}\frac{dt}{t\ln t}=^{1}\ln\ln x+^{\pm}C$$

得(4)式

第13章　概率格点论

13．1格点及格点线

定义1　用概率方法研究边缘包含足够长、非周期性曲线$y=f(x)$的某种闭合线内的格点个数等问题，称为概率格点论，此曲线可简称指定曲线

下面的分析中，均假定闭合线穿过格点的个数，远小于闭合线内格点个数，并忽略位于闭合线上格点的计算，其误差不影响结果的精度。

定义2　当闭合线完全由指定曲线$y=f(x)$构成时，称为闭合曲线；当闭合线部分是指定曲线$y=f(x)$，其余是直线构成时，称为闭合曲直线

定义3　间距等于1的水平及垂直平行线相交的每个点，称为格点，穿过多个格点的直线，称为格点线，格点线与水平线的夹角，称为格点线夹角

推理1　格点线夹角记为θ，则它的正切值$tg\theta$的值是分数

证明　所有的格点线夹角θ，可用与穿过$(0,0)$及$(1,i)$两点直线的平行线确定，则两点的直线方程可表为

$$y=\frac{1}{i}x=xtg\theta \tag{1}$$

因i是整数，故推理成立

定义4　将4个相邻格点构成的正方形，称为格点方块，简称方块

推理2　足够长的闭合线内，几乎每个方块可以与一个格点相对应，格点个数的最可几值，等于它的面积

证明　对非边缘的格点，由4个相邻格点构成一个方块；同时，一个格点被4个方块共用，故平均每个方块占用一个格点，即每个闭合线内非边缘的方块，可以与一个格点相对应。足够长的闭合线内边缘附近的格点个数，相对于闭合线内的格点个数是一个高阶小量，故几乎每个方块可以与一个格点相对应，方块的面积等于1，由此获得本推理

定义 5　闭合线与某格点线的交点，与位于闭合线内外该线上距闭合线最近的格点之间距离，分别称为内随机截距及外随机截距

定义 6　穿过方块的闭合线，将方块切割成内外两部分，分别称它们是外随机块，内随机块。简称随机块。可将每个随机块与它的左侧截距相关联（忽略位于闭合线上的格点）

推理 3　随机截距的值分布在$(0,1)$之间，闭合线内全部垂直（或水平）格点线长度之和，减去它们的内随机截距之和，等于闭合线内格点个数，

证明　显然成立。如是任意格点线夹角，可以通过旋转坐标，也可以向水平或垂直方向投影进行求解

本章用两种方法分析格点：面积法和截距法，分别介绍如下：

定义 7　因格点与方块几乎可一一对应，通过分析闭合线内方块面积获得格点个数的方法，称为面积法；

定义 8　将闭合线内垂直(或水平)格点线的长度，减去它两端的内随机截距，获得该格点线上的格点个数，对所有闭合线内垂直(或水平)格点线上的格点求和，获得格点个数的方法，称为截距法

当曲线穿过某方块时，显然，该方块的 4 个格点中，至少有一个但多数情况下最多有三个格点位于闭合线内（忽略闭合线穿过格点的情况），否则，该方块的 4 个格点，全部位于闭合线内，或全部位于闭合线外，由此将格点分为确定格点和随机格点两类，定义如下

定义 9　被闭合线穿过的方块中的格点，不能确定它位于闭合线内外时，称为随机格点，否则称为确定格点。

定义 10　闭合线附近的随机格点分布的区域，称为随机区域，否则称为确定区域，这两个区域的分界线，称为随机界线。位于闭合线内的随机界线，称为内随机界线，否则称为外随机界线

随机界线的确定方法

推理 4　让方块在闭合线内侧或外侧贴着闭合线平移，与闭合线接触的格点成对角的格点不能确定在闭合线内外时，它移动的轨迹就是随机界线

证明　这种方式产生的轨迹线，符合随机界线定义

定义 11　指定曲线的法线与随机界线形成两个交点，这两点间的距离，称为随机区域宽度。在指定闭合线内外两条的随机界线内的面积，称为随机区域面积

推理 5　当指定曲线足够长时，随机区域的面积，几乎等于随机区域的格点个数

证明 略

推理 6　足够长的指定曲线内外几乎各分一半随机区域面积，其中内侧比外侧少一个高阶小量

证明　显然成立，过程此略

推理 7　随机区域的宽度在$\left[2\,,2\sqrt{2}\right]$之间

证明　因方块中的两个格点最近距离 1，最远距离是$\sqrt{2}$，指定曲线内外的随机区域宽度之和，是此距离的两倍

为了使用概率统计的方法研究随机格点的分布行为，将具有确定分布的随机格点，在足够长的闭合线随机区域中的分布情况，用以下公理进行约定

13.2 格点公理

公理 1　足够长的闭合线附近的随机格点分布规律，在统计意义上几乎等价于它们等几地分布在闭合线附近的随机区域（面积法）；闭合线内的随机截距几乎等几地分布在 0.5 附近(截距法)，将此约定称为等几格点公理。

定义 12　在闭合曲线及闭合曲直线中，用符号ϕ分别代表下面的值

$$\phi=\begin{cases} {}^{1}0.5(\text{闭合曲线}) \\ {}^{\pm}0.5(\text{闭合曲直线}) \end{cases}$$

当是闭合曲线格点问题时，随机格点将严格遵守格点公理的约定；当是闭合曲直线格点问题时，闭合线内外的随机格点之差，相对于随机格点而言，存在一个与随机格点均方差同阶系统误差(可由实际数据估值系统误差的大小)，理解如下

在闭合曲线格点问题中，因曲线从各个方向较均匀地切割方块，使随机区域内的格点比较平均地分配在曲线内外，曲线内格点的最可几值，几乎等于曲线内的面积；

但在闭合曲直线格点问题中，因曲线在某一方向切割方块更多，不能较好地相互抵消偏差，从而留下一个相对于随机格点均方差同阶的系统误差，这一定性分析的结果，得到后面实际数据的支持。

推理 8　当闭合线足够长时，随机区域内的格点，出现在闭合曲线内的这一指定事件，几乎等价于贝努里等几随机试验，且几乎每个格点出现在闭合曲线内外两侧的概率均为二分之一

证明　结合上面的定义、公理及推理，因随机区域内的格点，几乎等几率地分布在闭合曲线的内外两侧，故它出现在闭合曲线内外两侧的概率均为二分之一，试验次数等于随机区域面积，当闭合曲线足够长，即随机区域面积足够大，即试验次数足够多，就符合贝努里等几随机试验条件

推理 9　参照图 13.1 随机块示意图（图中量未标全），闭合线上侧及下侧函数，分别记为 $y_1 = f_1(x)$、$y_2 = f_2(x)$，闭合线的上侧及下侧函数与某垂直格点线相交的内随机截距长度、它们之和及平均值，分别记为 $\Delta d_{\xi 1}(x)$、$\Delta d_{\xi 2}(x)$、$\Delta d_{\xi}(x)$、$\Delta\bar{d}_{\xi 1}(x)$、$\Delta\bar{d}_{\xi 2}(x)$，随机格点个数记为 $s_{\xi 1}(x)$、$s_{\xi 2}(x)$ 的平均值，分别记为 $\bar{s}_{\xi 1}(x)$、$\bar{s}_{\xi 2}(x)$，$\Delta d_{\xi}(x)$ 的均方差记为 $\sigma\left(\Delta d_{\xi}(x)\right)$，则：

$$0 \le \Delta d_{\xi}(x) = \Delta d_{\xi 1}(x) + \Delta d_{\xi 2}(x) \le 2 \tag{2}$$

$$0 < \Delta d_{\xi 1}(x) = f_1(x) - \left[f_1(x)\right] < 1 \tag{3}$$

$$0 < \Delta d_{\xi 2}(x) = \left[f_2(x) - \varepsilon\right] + 1 - f_2(x) < 1 \tag{4}$$

$$\Delta\bar{d}_{\xi 1}(x) =^{1} \Delta\bar{d}_{\xi 2}(x) =^{\pm} 1 \tag{5}$$

$$\bar{s}_{\xi 1}(x) =^{\pm} \bar{s}_{\xi 2}(x) =^{\pm} 1 \tag{6}$$

$$\Delta\bar{d}_{\xi}(x) = \Delta\bar{d}_{\xi 1}(x) + \Delta\bar{d}_{\xi 2}(x) =^{\pm} 1 \tag{7}$$

$$\sigma\left(\Delta d_{\xi}(x)\right) = \frac{^{\pm}\sqrt{3}}{3} \tag{8}$$

其中 ε 是足够小的常数；忽略随机截距为零的情况

证明　闭合线上侧函数 $y_1 = f_1(x)$ 与某方块切于 P_1 、P_2 两点，此两切点连线与 x 轴夹角是 θ_1 。若闭合线上侧全由曲线构成，θ_1 角在 $\left(-90^0, 90^0\right)$ 内出现的概率分布函数，记为 $\psi_1(\theta)$，它的平均值记为 $\overline{\theta}_1$，可计算具体曲线 θ_1 角的定义域、$\psi_1(\theta)$ 函数及平均值 $\overline{\theta}_1$ 等。(3) 式、(4) 式显然成立。(5) 式 是等几格点公理的约定。

由 (5) 式，得 (7) 式

当 $\overline{\theta}_1 =^1 0^0$，并结合 (5) 式，得 $\bar{s}_{\xi 1} =^1 \bar{s}_{\xi 2} = \phi$；因 $0 < s_{\xi 1} < 1$ 、$0 < s_{\xi 2} < 1$，故一般情况得 (6) 式

由 (3) 式及 (4) 式，得 (2) 式

因 $\Delta d_\xi(x)$ 在 $[0,2]$ 附近几乎是平均分布的，由 (2) 式及第一章 (67) 式

$$\sigma(a,b) = \frac{^{\pm}(b-a)\sqrt{3}}{6}$$

计算 $\Delta d_\xi(x)$ 的均方差 $\sigma\left(\Delta \overline{d}_\xi(x)\right)$ 如下

$$\sigma\left(\Delta d_\xi(x)\right) = \frac{^{\pm}(b-a)\sqrt{3}}{6}\Bigg|_{a=0}^{b=2} = \frac{^{\pm}\sqrt{3}}{3}$$

得 (8) 式

同理，分析闭合线下侧函数 $y_2 = f_2(x)$ 全由曲线构成时，可得出类似结果：此略

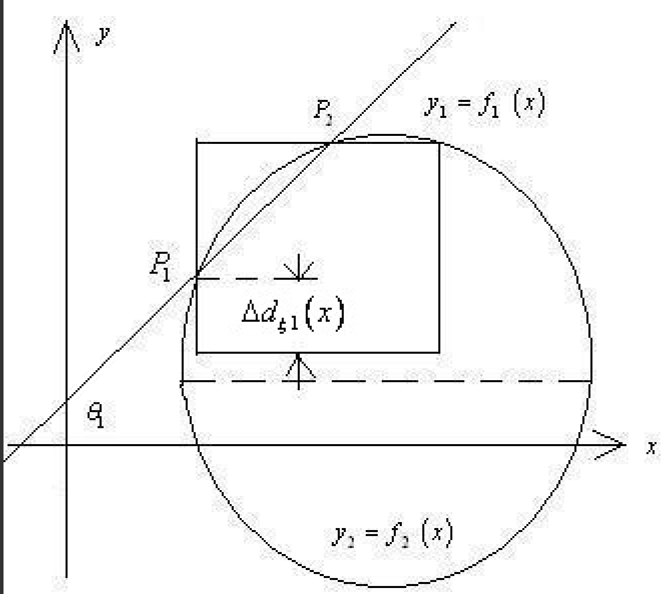


图13.1 随机块示意图

13.3　闭合线格点定理

定理 1　面积法：若指定曲线$y = f(x)$　$((x,y)\in\omega)$的闭合线分布在$(a \le x \le b$，$c \le y \le d)$内，此闭合线内的实际格点个数、理论格点个数、随机格点个数、随机区域面积及闭合线内面积，分别记为$u(\omega)$、$U(\omega)$、$u_\xi(\omega)$、$s_\xi(\omega)$及$s(\omega)$，将$u(\omega)$的均方差及边界，分别记为$\sigma(\omega)$及 $u(\omega)$，则

$$u_\xi(\omega) \overset{\le}{=} 4\sqrt{2}(b-a+d-c) \tag{9}$$

$$u(\omega) = U(\omega) \pm u(\omega) \tag{10}$$

$$U(\omega) = \int^{s} f(\omega)\,dx + C(\omega) \tag{11}$$

$$\sigma(\omega) = 0.5\sqrt{u_{\xi}(\omega)} = \sqrt{^{\le}\sqrt{2}(b-a+d-c)} \tag{12}$$

$$u(\omega) =^{1} \sqrt{2\ln\ln u_{\xi}(\phi)}\ \sigma(\omega) =^{1} 0.5\sqrt{2u_{\xi}(\omega)\ln\ln u_{\xi}(\omega)} \tag{13}$$

其中　在闭合曲线格点问题中，$C(\omega)$ 的阶比闭合曲直线格点问题中的小

证明　由前面的有关定义及推理，显然(11)式成立

含 $y = f(x)$ 曲线闭合线的随机区域平均宽度，平均长度及面积，分别表为$\overline{L}_1$、$\overline{L}_2$、s_{ξ}，则

$$2 \le \overline{L}_1 \le 2\sqrt{2} \tag{14}$$

显然，L_2 不大于外置于闭合曲线的矩形周长 $2(b-a+d-c)$，即：

$$\overline{L}_2 \le 2(b-a+d-c)$$

得面积法中随机格点个数 $u_{\xi}(\omega)$ 的表达式如下：

$$u_{\xi}(\omega) =^{1} s_{\xi}(\omega) =^{1} \overline{L}_1 * \overline{L}_2 < 4\sqrt{2}(b-a+d-c)$$

由等几格点公理，几乎可将随机区域的格点的分布行为，等价于贝努里等几随机试验模型，随机区域内格点出现在闭合曲线内的概率记为 p，

$$p =^{1} 0.5$$

由第二章边界中(5)式及(7)式：

$$\sigma(n) = \sqrt{n\,p(1-p)}$$

$$^{\uparrow}M\left(n\right) =^{1} \sqrt{2\ln\ln n}\ \sigma\left(n\right)$$

得面积法中均方差$\sigma\left(\omega\right)$及边界 $u\left(\omega\right)$的表达式如下：

$$\sigma\left(\omega\right)=\sqrt{p\left(1-p\right)u_{\xi}\left(\omega\right)}=0.5\sqrt{u_{\xi}\left(\omega\right)}=0.5\sqrt{^{\leq}4\sqrt{2}\left(b-a+d-c\right)}$$

$$u\left(\omega\right)=^{1}\sqrt{2\ln\ln u_{\xi}\left(\omega\right)}\ \sigma\left(\omega\right)=0.5\sqrt{2u_{\xi}\left(\omega\right)\ln\ln u_{\xi}\left(\omega\right)}$$

得 (12)、(13)式

定理 2　垂直截距法：闭合线内格点个数、随机格点个数及面积，分别记为$u\left(a,b\right)$，$U\left(a,b\right)$， $u_{\xi}\left(a,b\right)$，$s\left(a,b\right)$，将$u\left(a,b\right)$的均方差、边界分别$\sigma\left(a,b\right)$，$u\left(a,b\right)$，则

$$u_{\xi}\left(a,b\right)=2\left(b-a\right) \tag{15}$$

$$u\left(a,b\right)=\sum_{m=a}^{b}\Delta u\left(m\right)=U\left(a,b\right)+u_{\xi}\left(a,b\right)=U\left(a,b\right)\pm\ u\left(a,b\right) \tag{16}$$

$$U\left(a,b\right)=2\phi\int_{a}^{b}\left[f\left(x\right)_{1}-f\left(x\right)_{2}\right]dx+\left(1-2\phi\right)\left(b-a\right)=2\phi s\left(a,b\right)+\left(1-2\phi\right)\left(b-a\right) \tag{17}$$

$$\sigma\left(a,b\right)=\frac{^{\pm}\sqrt{3\left(b-a\right)}}{3} \tag{18}$$

$$u\left(a,b\right)=^{1}\sqrt{2\ln\ln u_{\xi}\left(a,b\right)}\ \sigma\left(a,b\right)=\frac{^{\pm}\sqrt{6\left(b-a\right)\ln\ln 2\left(b-a\right)}}{3} \tag{19}$$

$$\phi=\begin{cases}^{1}0.5(\text{闭合曲线})\\ ^{\pm}0.5(\text{闭合曲直线})\end{cases} \tag{20}$$

证明　图 13.2 垂直截距法示意图及 图 13.3　水平截距法示意图，两者算法相同。在垂直截距法中，位于闭合线上下两侧的函数，分别记为 $y_1 = f_1(x)$、$y_2 = f_2(x)$，参见图 13.2，图中水平虚线是两函数分界线。

位于某垂直格点线 $x = m$ 上、且与闭合线上下两侧函数 $y_1 = f_1(x)$、$y_2 = f_2(x)$ 相交的两个交点之间的格点个数、随机格点个数及随机截距长度，分别记为 $\Delta u(m)$，$\Delta u_\xi(m)$，$\Delta d_\xi(m)$。

因 $\Delta d_\xi(m)$ 的值几乎等几率地分布地 $[0,2]$ 中，从 (2)、(7) 式

$$0 \le \Delta d_\xi(m) = \Delta d_{\xi 1}(m) + \Delta d_{\xi 2}(m) \le 2$$

$$\Delta \bar{d}_\xi(m) = \Delta \bar{d}_{\xi 1}(m) + \Delta \bar{d}_{\xi 2}(m) \overset{\pm}{=} 1$$

的表达中，可将 $\Delta d_\xi(m)$ 近似成：随机试验次数 $\Delta u(m)$ 是 2，发生概率是 p 的等几随机试验，则

$$p = \frac{\Delta \bar{d}_\xi(m)}{\Delta u(m)} \overset{\pm}{=} \frac{1}{2} \tag{21}$$

$$u_\xi(a,b) = \sum_{m=a}^{b} \Delta u(m) = \sum_{m=a}^{b} 2 = 2(b-a)$$

得 (15) 式

参考图 13.1、图 13.2 及 (3)、(4) 两式得

$$\Delta d_\xi(m) = \Delta d_{\xi 1}(m) + \Delta d_{\xi 2}(m) = f_1(m) - [f_1(m)] + [f_2(m) - \varepsilon] + 1 - f_2(m)$$

$$= f_1(m) - f_2(m) - [f_1(m)] + [f_2(m) - \varepsilon] + 1 \tag{22}$$

整理上式，得：

$$\left[f_1(m)\right]-\left[f_2(m)-\varepsilon\right]=f_1(m)-f_2(m)+1-\Delta d_{\xi}(m)$$

让 m 在 (a,b) 内对上式求和，左边得 $u(a,b)$ 的表达：

$$u(a,b)=\sum_{m=a}^{b}\left\{\left[f_1(m)\right]-\left[f_2(m)-\varepsilon\right]\right\}=\sum_{m=a}^{b}\left[f_1(m)-f_2(m)+1-\Delta d_{\xi}(m)\right]$$

$$=2\phi\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx+\sum_{m=a}^{b}\left[1-\Delta d_{\xi}(m)\right]=2\phi s(a,b)+\sum_{m=a}^{b}\left[1-\Delta d_{\xi}(m)\right] \quad (23)$$

上式中，使用了前面定义的 ϕ 值。由上式及 (7) 式，得

$$U(a,b)=^{1}\overline{u}(a,b)=2\phi\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx+^{1}\sum_{m=a}^{b}\left[\overline{1-\Delta d_{\xi}(m)}\right]$$

$$=2\phi\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx+^{1}\sum_{m=a}^{b}\left[1-\overline{\Delta d_{\xi}(m)}\right]=2\phi\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx+\sum_{m=a}^{b}(1-2\phi)$$

$$=2\phi s(a,b)+(1-2\phi)(b-a)$$

整理上式，得 (17) 式

可将 $\Delta d_{\xi}(m)$ 的分布规律，近似成在 $(0,2)$ 附近平均分布概率模型，由 (8) 式及 (23) 式计算 $u(a,b)$ 的均方差 $\sigma(a,b)$，得

$$\sigma^2(a,b)=\sigma^2(u(a,b))=\sigma^2\left(2\phi s(a,b)+\sum_{m=a}^{b}\left[1-\Delta d_{\xi}(m)\right]\right)=\sigma^2\left(\sum_{m=a}^{b}\Delta d_{\xi}(m)\right)$$

$$=\sum_{m=a}^{b}\sigma^2\left(\Delta d_\xi(m)\right)=(b-a)\sigma^2\left(\Delta d_\xi(m)\right)=\frac{(\pm 1)^2(b-a)}{3}$$

整理上式，得(18)式

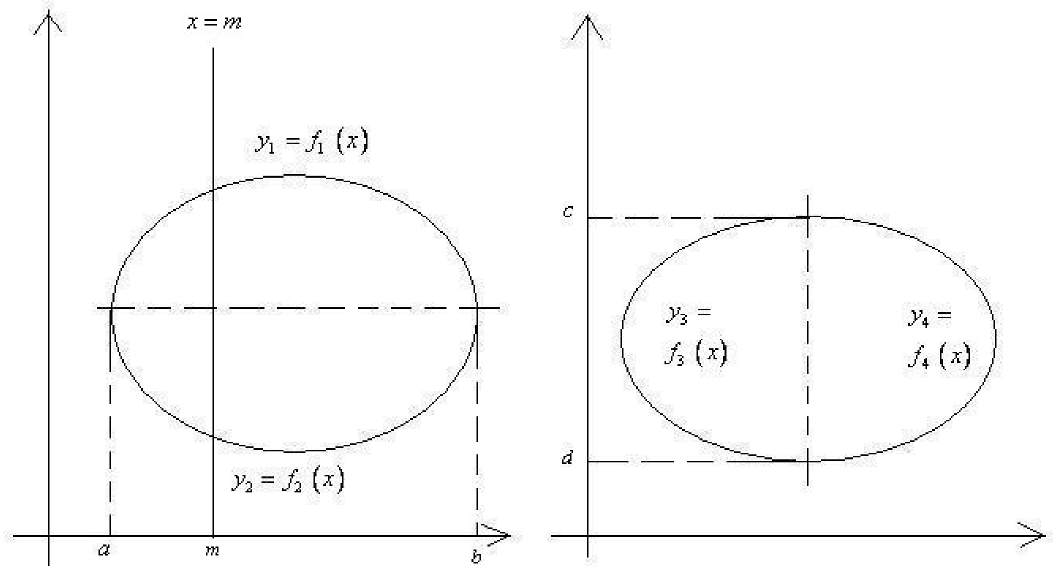


图 13.2 垂直截距法示意图　　图 13.3 水平截距法示意图

本定理使用的关键是分析随机格点分布的区域：$(0\le x\le a, 0\le y\le b)$，通过下面两个推理进一步说明其用法

13.4 反比曲线格点定理

定理 3 反比曲线

$$mn=x \tag{24}$$

与第一象限m、n轴间的实际格点个数，理论格点个数及随机格点个数，分别记为$u(x)$、$U(x)$及$u_\xi(x)$，将$u(x)$的均方差及边界，分别记为$\sigma(x)$， $u(x)$，则

$$u_\xi(x)=2\sqrt{x} \tag{25}$$

$$u(x)=U(x)\pm\ u(x) \tag{26}$$

$$U(x)=2\phi s(a,b)+(1-2\phi)(b-a)=^{\pm} x\ln x \tag{27}$$

$$\sigma(x)=\frac{^{\pm}1}{3}\sqrt{3\sqrt{x}} \tag{28}$$

$$u(x)=^{1}\sqrt{2\ln\ln u_\xi(a,b)}\ \sigma(a,b)=\frac{^{\pm}1}{3}\sqrt{6\sqrt{x}\ln\ln 2\sqrt{x}} \tag{29}$$

证明　闭合线由u轴、v轴及第一象限的反比曲线$uv=x$三者所围区域构成。参照图 13.4 反正曲线示意图,说明如下：

位于闭合线中间且边长是$\sqrt{x}$的正方形，将闭合线隔成图形对称且相等的另两个区域，用三个点坐标代表：$\{P_1,P,(0,\sqrt{x})\}$及$\{P_2,P,(\sqrt{x},0)\}$。因垂直截距法计算区域$\{P_1,P,(0,\sqrt{x})\}$的均方差及边界比区域$\{P_2,P,(\sqrt{x},0)\}$小，根据边界一章中的最小边界原则，计算区域$\{P_1,P,(0,\sqrt{x})\}$的随机格点个数加倍、均方差乘2开平方即可，但定理1对上下两侧随机截距的都统计，而这里只有上侧才有随机截距，正方形不影响均方差及边界，故取消这个增加量，直接使用(15)：(19)式，又因是闭合曲直线问题，则$2\phi=^{\pm}1$，且$b=\sqrt{x}$、$a=0$，得(25)：(29)式。

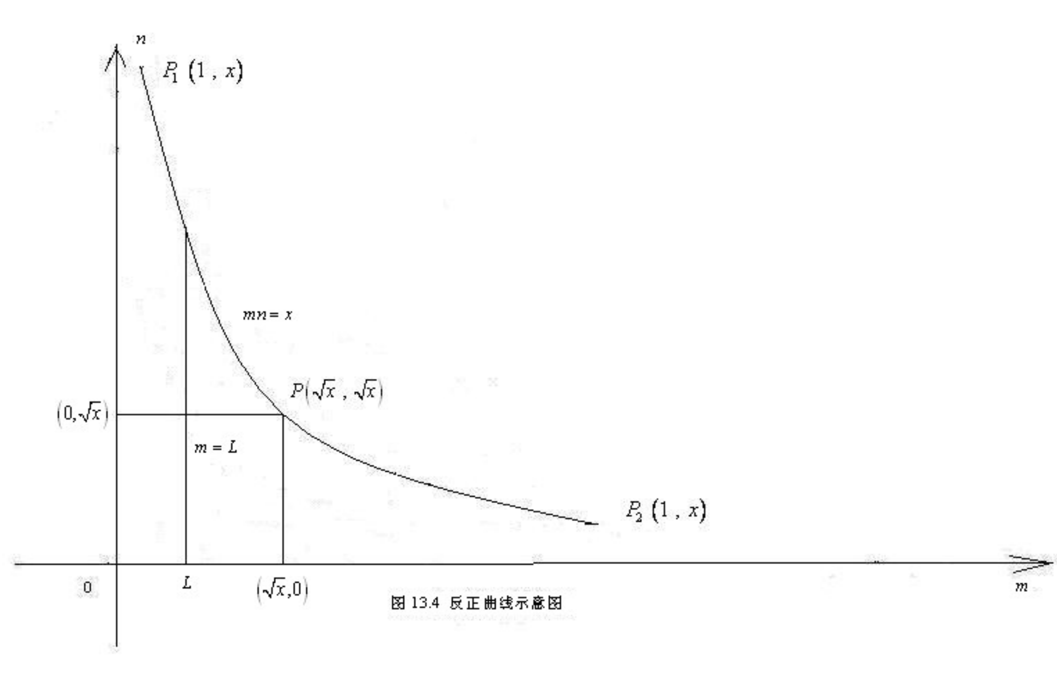


图 13.4 反正曲线示意图

本定理目前的结果为[10]P191

$$U(x)=x(\ln x+2\gamma-1)+O(\sqrt{x})$$

其中 $\gamma \doteq 0.5772\ 1566\ 4901\ 5328\ 6060\ 6512\ 09$ 是欧拉常数，则

$$2\gamma-1 \doteq 0.1544\ 3132\ 9803\ 0657\ 2121\ 3024\ 18$$

（源于网址：http://baike.baidu.com/view/296190.htm）

$R-\overline{R}$

13.1

表 13.1 反比曲线 $uv=x$ 格点数据表

x	$u(x)$	Δ	$u(x)_0$	R	$R-\overline{R}$	$(R-\overline{R})^2$
10^1	27	2.42984	1. 13603	2. 13888	0.28463	0.08101
10^2	482	6.03984	2. 70455	2. 23322	0.37897	0.14362
10^3	7069	6.81339	5. 47601	1. 24423	−0.61002	0.37212

10^4	93668	20.2830	10.5432	1.92380	0.06955	0.00484
10^5	1166750	14.3205	19.8235	0.72240	-1.13185	1.28108
10^6	13970034	92.1122	36.7720	2.50496	0.65071	0.42342
10^7	162725364	94.1924	67.6262	1.39284	-0.46141	0.21290
10^8	1857511568	360.624	123.636	2.91682	1.06257	1.12905
10^9	20877697634	467.251	225.076	2.07597	0.22172	0.04916
10^10	231802823220	622.564	408.406	1.52438	-0.32987	0.10881
10^11	2548286736297	1023.24	739.227	1.38421	-0.47004	0.22094
10^12	27785452449086	3354.39	1335.35	2.51199	0.65774	0.43262
10^13	300880375389757	2500.40	2408.29	1.03825	-0.81600	0.66586
10^14	3239062263181054	9083.47	4337.47	2.09419	0.23994	0.05757
10^15	34693207724724246	10495.0	7803.23	1.34496	-0.50929	0.25938
10^16	369957928177109416	31449.3	14024.8	2.24241	0.38816	0.15067
10^17	3929837791070240368	56133.0	25185.9	2.22875	0.37450	0.14025
Σ				31.5226		5.73331

上面数据表中的实际数据来自网址：东陆论坛，其它问题分论坛，由 junerr 计算并发表在数素论问题帖子中，此谢

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=1817&Forum_ID=9

说明

$$U(x)_0 = x(\ln x + 2\gamma - 1) = x(\ln x + 0.1544\ 3132\ 9803\ 0657\ 2121\ 3024\ 18)$$

$$\Delta = u(x) - U(x)_0$$

$$u(x)_0 = \frac{1}{3}\sqrt{6\sqrt{x}\ln\ln 2\sqrt{x}}$$

$$R = \frac{\Delta}{u(x)_0} = \frac{u(x) - U(x)_0}{u(x)_0} = 3\frac{u(x) - U(x)_0}{\sqrt{6\sqrt{x}\ln\ln 2\sqrt{x}}}$$

$$\overline{R} = 31.5226 \div 17 = 1.85425$$

$$\sigma\left(R - \overline{R}\right) = \sqrt{\left(R - \overline{R}\right)^2 \div 17} = \sqrt{5.73331 \div 17} = 0.58074$$

$$\left(R-\overline{R}\right)=\sqrt{2\ln\ln 17}\sigma\left(R-\overline{R}\right)=0.58074\sqrt{2\ln\ln 17}=0.83807$$

从表 13.1 表中看，$x=10^5$ 及 $x=10^8$ 的 $R-\overline{R}$ 值，分别为-1.13185 和 1.06257，均超过 $\left(R-\overline{R}\right)$ 的值，说明统计 $\left(R-\overline{R}\right)$ 值的数据个数 17 个，未达到足够大这一要求。假如我们认为 $\left(R-\overline{R}\right)$ 是 1.5，$\sigma\left(R-\overline{R}\right)=0.58074$ 不变，计算需要统计的数据个数 n 如下：

$$\left(R-\overline{R}\right)=\sqrt{2\ln\ln n}\sigma\left(R-\overline{R}\right)=0.58074\sqrt{2\ln\ln n}=1.5$$

则

$$2\ln\ln n=(1.5\div 0.58074)^2=2.58291^2=6.67143$$

$$n=\exp\left(\exp\left(6.67143\div 2\right)\right)=\exp\left(\exp\left(3.33572\right)\right)=\exp\left(28.0985\right)=1.59595*10^{12}$$

定义 13　$\left(R-\overline{R}\right)$ 就是边界一章中，定义的比值边界，但这里是用数值的方式计算出来的，可称为数值比值边界（类似数值积分）

书中几乎所有的边界边界问题都可以计算数值比值边界，由此可以获得绝对边界。在这个问题中，即使借助电脑也没法计算 $n=1.59595*10^{12}$ 个 x 值的 $R-\overline{R}$ 等值，从而用数值比值边界的方法获得 $\left(R-\overline{R}\right)$ 值，并计算出绝对边界来。但用 $n=17$ 这 17 个数据统计的 $\left(R-\overline{R}\right)=0.83807$ 来估值实际的 $\left(R-\overline{R}\right)$。将 $\left(R-\overline{R}\right)=0.83807$ 加倍即 $\left(R-\overline{R}\right)=1.67614$ 应该能满足要求，它表示前 $n=1.59595*10^{12}$ 个统计数据的边界，应该能满足充分大这一条件, 即在前 $n=1.59595*10^{12}$ 个实际数据统计中，$\left|R-\overline{R}\right|\le 1.67614$ 应该能满足。

定义 14　因

$$R=\frac{\Delta}{u(x)_0}=\frac{u(x)-U(x)_0}{u(x)_0}=\overline{R}\pm\left(R-\overline{R}\right)$$

得

$$u(x)=U(x)_0\pm u(x)_0\left(\overline{R}\pm\left(R-\overline{R}\right)\right)$$

可将上式中的 $u(x)_0\left(\overline{R}\pm\left(R-\overline{R}\right)\right)$ 值，称为边界的边界，或绝对边界，它体现了$u(x)$值变化的最大范围，是“真正”意义上的绝对边界。在本问题中可称它为数值边界的边界，或称为数值绝对边界

13.5 园内格点定理——高斯格点定理

推理 4 半径为$\sqrt{x}$的园内格点方程可表为：

$$u^2+v^2\leq x \tag{30}$$

其园内的实际格点个数，理论格点个数及随机格点个数，分别记为$a(x)$、$A(x)$及$a_\xi(x)$，且$a(x)$的均方差及边界，分别记为$\sigma(a(x))$及 $a(x)$，则

$$a_\xi(x)=2(b-a)=4\sqrt{x} \tag{31}$$

$$a(x)=A(x)\pm a(x) \tag{32}$$

$$A(x)=\pi x \tag{33}$$

$$\sigma(a(x))=\frac{\pm\sqrt{3(b-a)}}{3}=\frac{\pm\sqrt{6\sqrt{x}}}{3} \tag{34}$$

$$a(x)=\sqrt{2\ln\ln a_{\xi}(x)}\ \ \sigma(a(x))=\frac{\pm 2}{3}\sqrt{3\sqrt{x}\ln\ln 4\sqrt{x}} \tag{35}$$

证明　由(15)：(19)式得(31)：(35)式，其中 因 $u^2+v^2\le x=\left(\sqrt{x}\right)^2$

在(15)：(19)式 $b=\sqrt{x}$， $a=-\sqrt{x}$

结论(35)式表明，人们在 $a(x)=O\left(x^{\theta}\right)$ 中的猜想：$\theta=\frac{1}{4}$ [10]P194 基本上正确

可以用更接近实际情况的概率模型，对随机格点的分布现象进行更好的分析，以期提高结果精度，此略。有关数据见表13.2。

表13.2　园内 $u^2+v^2\le x$ 格点数据表

x	$a(x)$	$a(x)-\pi x$	$a(x)_0$	R
10^1	37	5.58407	1.98148	2.81813
10^2	317	2.84073	3.33473	0.85186
10^3	3149	7.40735	8.15414	0.90842
10^4	31417	1.07346	15.4503	0.06948
10^5	314197	37.7346	28.7910	1.31064
10^6	3141549	-43.6536	53.1104	-0.82194
10^7	31416025	98.4641	97.3034	1.01193
10^8	314159053	-212.359	177.409	-1.19700
10^9	3141592409	-244.590	322.301	-0.75889
10^10	31415925457	-1078.90	583.913	-1.84770
10^11	314159264013	-1345.98	1055.58	-1.27511
10^12	3141592649625	-3964.79	1904.87	-2.08140
10^13	31415926532017	-3880.93	3432.54	-1.13063
10^14	314159265350589	-8390.32	6177.86	-1.35813
10^15	3141592653588533	-1260.24	11107.5	-0.11346
10^16	31415926535867961	-29971.4	19953.4	-1.50207
10^17	314159265358987341	8017.15	35816.8	0.22384
Σ				-4.66819

以上数据来自网址：东陆论坛，其它问题分论坛，由 junerr 计算并发表在数素论问题帖子中，此谢

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=1817&Forum_ID=9

其中

$$\pi =^{\pm} 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 795$$

$$a(x)_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{x}\ln\ln 4\sqrt{x}}$$

$$R = \frac{a(x) - \pi x}{a(x)_0} = \overline{R} \pm \ (R - \overline{R})$$

$$\overline{R} = \frac{1}{17}\sum R = \frac{-4.66819}{17} = -0.27460$$

$$a(x) = \pi x \pm \ a(x)_0 R = \pi x \pm \frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{x}\ln\ln 4\sqrt{x}}\left[\overline{R} \pm \ (R - \overline{R})\right]$$

13.6　立体闭合曲面格点定理

定理2　面积法　立体闭合曲面$z = f(x,y)$　$(0 \le x \le a\ , 0 \le y \le b\ ,\ 0 \le z \le c)$内的实际格点个数、理论格点个数及随机格点个数，分别记为$u(a,b)$、$U(a,b)$、$u_{\xi}(a,b)$，且$u(a,b)$的均方差及边界，分别记为$\sigma(u(a,b))$及 $u(a,b)$，则

$$u_{\xi}(a,b) =^{<} 8\pi\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2) \tag{36}$$

$$u(a,b) = U(a,b) \pm \ u(a,b) \tag{37}$$

$$U(a,b) = \int_0^b \int^a f(x,y)\,dxdy + C \tag{38}$$

$$\sigma(u(a,b)) = 0.5\sqrt{u_{\xi}(a,b)} = \sqrt{^{<}8\pi\sqrt{2}(a^2 + b^2 + c^2)} \tag{39}$$

$$u(a,b) =^{1} \sqrt{2\ln\ln u_{\xi}(a,b)}\ \sigma(u(a,b)) =^{1} 0.5\sqrt{2u_{\xi}(a,b)\ln\ln u_{\xi}(a,b)} \tag{40}$$

证明　立体闭合曲面$z=f\left(x,y\right)$，外置球面的最大面积，小于$4\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)$，随机格点分布在外置球面的球壳厚度，不大于立方体的对角线长$\sqrt{3}$的两倍，故得$\left(20\right)$，其余过程与平面闭合曲线概率格点定理的证明类似，过程此略

还可在 R 维空间中，推广概率格点定理

13.7　R 维空间闭合曲面格点定理

定理 3　R 维空间闭合曲面$z=f\left(x_i\right)$　$\left(0\le x_i\le a_i\ ,\ 0\le z\le c\ ,\ 1\le i\le R\right)$内的实际格点个数、理论格点个数及随机格点个数，分别记为$u\left(a_i\right)$、$U\left(a_i\right)$、$u_\xi\left(a_i\right)$，且$u\left(a_i\right)$的均方差及边界，分别记为$\sigma\left(u\left(a_i\right)\right)$及 $u\left(a_i\right)$，则

$$u_\xi\left(a_i\right)=^{<}C\left(R\right)\left(\sum_{i=1}^{R}a_i^{R-1}+c^{R-1}\right)\qquad(41)$$

$$u\left(a_i\right)=U\left(a_i\right)\pm\ u\left(a_i\right)\qquad(42)$$

$$U\left(a_i\right)=\int_0^{a_R}\int^{a_{R-1}}\cdots\int^{a_1}f\left(a_i\right)dx_1\cdots dx_{R-1}dx_R+C\qquad(43)$$

$$\sigma\left(u\left(a_i\right)\right)=0.5\sqrt{u_\xi\left(a_i\right)}=0.5\sqrt{^{<}C\left(R\right)\left(\sum_{i=1}^{R}a_i^{R-1}+c^{R-1}\right)}\qquad(44)$$

$$u\left(a_i\right)=^{1}\sqrt{2\ln\ln u_\xi\left(a_i\right)}\ \sigma\left(u\left(a_i\right)\right)=^{1}0.5\sqrt{2u_\xi\left(a_i\right)\ln\ln u_\xi\left(a_i\right)}\qquad(45)$$

其中　$C\left(R\right)\left(\sum_{i=1}^{R}a_i^{R-1}+c^{R-1}\right)$是半径为$a_i$ 的 R 维广义球面的面积之和，乘以随机球壳厚度$2\sqrt{R}$

证明　与前面定理类似，过程此略

本章总结：

（1）、通过概率方法及边界理论，能较好地确定格点个数等量的变化范围，这是概率格点论目前取得的一个成果；

（2）未能获得理想的格点个数理论值，即最可机值，有待继续探索。需要时，可借助更精确的现有理论结果

第 14 章　其它问题

14.1　费马大定理的证明

本问题的证明是 1983 年我刚研究数学问题时取得的

东陆论坛网友：jincheng1314 在 2006-5-10 给出了较好说明本问题的一个转帖如下

（http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=20555&Forum_ID=9）

"费马是 17 世纪法国数论大师，他在研究古希腊数学著作《算术》时写下了他最有名的挑战，即"费马大定理"。这个定理表达为：一个次数大于 2 的方幂不可能是两个同次方幂之和。费马在其批注的书页上留下了他让全世界数学家困惑了 300 多年的谜："我已发现此命题的一个真正奇妙的证明，但是这页边空白太小，写不下这个证明。"
1993 年英国怀尔斯证明了费尔马大定理，他运用了椭圆曲线、模形式、谷山－志村猜想、伽罗瓦群论、岩泽理论和科利瓦金－弗莱切方法，才成功证明了费尔马大定理。那么，费马本人是用什么方法证明他所提出的猜想的呢？到底有没有更简单的证明呢？
英国怀尔斯称"不会有比他更简单的证明了"。许多数学家、数学爱好者努力用一种简单的方法去证明费尔马大定理。他们相信在 17 世纪时费尔马不可能用椭圆曲线、模形式、谷山－志村猜想、伽罗瓦群论、岩泽理论和科利瓦金－弗莱切方法去证明费尔马大定理。"

定理 1　当 $n\geq 3$ 时，以下不定方程，无非零的整数解

$$X^n+Y^n=Z^n \qquad (X<Y<Z) \tag{1}$$

证明

$$X=\sum_{i=0}^{r_1}a_i 2^i,\quad Y=\sum_{j=0}^{r_2}b_j 2^j,\quad Z=\sum_{k=0}^{r_3}c_k 2^k \tag{2}$$

$$X^n=\sum_{m=0}^{R_3}A_m(a_i)\,2^m,\quad Y^n=\sum_{m=0}^{R_3}B_m(b_j)\,2^m,\quad Z^n=\sum_{m=0}^{R_3}C_m(c_k)\,2^m \tag{3}$$

$$\sum_{m=0}^{R_3}\left[A_m(a_i)+B_m(b_j)\right]2^m=\sum_{m=0}^{R_3}C_m(c_k)\,2^m \tag{4}$$

将变量 a_i，b_j，c_k 的总个数记为 t，将 (4) 中的系数方程个数记为 T。因(X, Y, Z)的奇偶性，显然

$$r_1\leq r_2\leq r_3,\qquad r_1+r_2\leq 2r_3-1 \tag{5}$$

$$t=r_1+r_2+r_3\leq 3r_3-1 \tag{6}$$

$$T = R_3 + 1 \geq nr_3 + 1 \tag{7}$$

由(6)得 $R_3 + 1$ 个，关于 2^m 系数相等的方程 ，因(4) 左边， 无 a_i， b_j 两组变量之间 的交叉相乘项，故在(4) 中，任意一个系数方程， 均无 a_i， b_j 的公因子，而相互独立。由(4) 可知 当 n> 3 时，(4) 中的独立方程个数 T，多于变量个数 t 而无解，故与它等价的不定方程(1) 也无解，证毕

推理 1 若 $\sum_{i=1}^{s} x_i^k = y^k$ 有解，则[1] P323

$$s \geq k \tag{8}$$

推理 2 若 $\sum_{i=1}^{s} x_i^{2k} = \sum_{i=1}^{s} y_i^{2k}$ 、 $\sum_{i=1}^{s} x_i^{2k+1} = \sum_{i=1}^{s} y_i^{2k+1}$ 有解，则

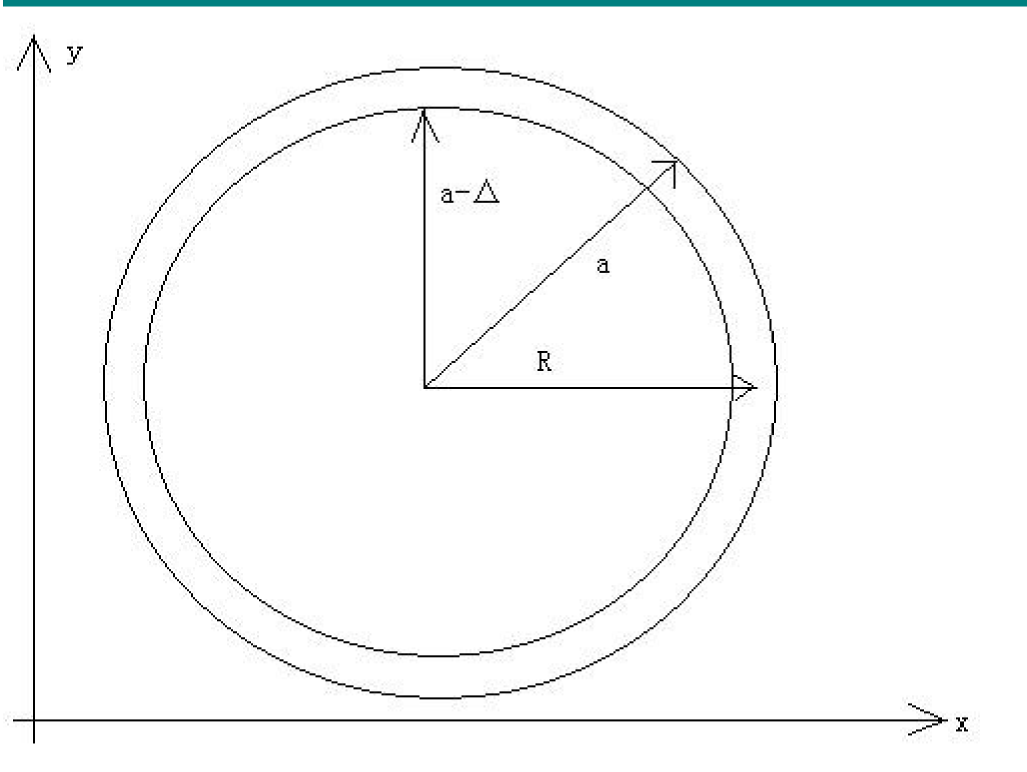
$$s \geq k + 1 \tag{9}$$

(发帖网址：http://www.iac55.cn/thread-4265-1-1.html)

14.2 层流能耗功率密度

定理 2 设液体层流时的粘滞系数记为 η，流速递度记为 $\frac{\partial v(R)}{\partial R}$， 层流能耗功率密度记为 ρ， 则

$$\rho = \eta \left(\frac{\partial v(R)}{\partial R} \right)^2 \tag{10}$$



证明　方法1、下面研究两个长度均为l、半径各为$a-\Delta$、a的同轴圆筒，且 $\Delta = a$,两圆筒中间充满粘滞系数为η的液体，它的体积记为V，则

$$V=\pi\left[a^2-(a-\Delta)^2\right]l=\pi\left[2\Delta a-\Delta^2\right]l=\pi\Delta(2a-\Delta)l \qquad (11)$$

内筒固定，外筒以v速度匀速旋转，使液体呈现稳定的层流状态，液体的流速梯度大小记为$\frac{\partial v(R)}{\partial R}$，则

$$\frac{\partial v(R)}{\partial R}=\frac{v}{\Delta} \qquad (12)$$

外筒受到液体的粘滞阻力记为f_a，则

$$f_a=2\pi al\eta\frac{\partial v(R)}{\partial R} \qquad (13)$$

粘滞阻力f_b产生的能耗功率记为w_a，则

$$w_a=vf_a=2\pi al\eta v\frac{\partial v(R)}{\partial R} \qquad (14)$$

由于能耗功率w_a是旋转的整个层流流体能耗功率，除以液体的体积V，就得到该层流能

耗功率密度记为 ρ_a，则 $\rho_a = \frac{w_a}{V} = \frac{2\pi al\eta v}{\pi\Delta(2a-\Delta)l}\frac{\partial v(R)}{\partial R} = \frac{\eta a}{a-0.5\Delta}\left(\frac{\partial v(R)}{\partial R}\right)^2$

对 ρ_a 求 a 趋于无穷大时极限，就得到严格意义上的层流能耗功率密度 ρ

$$\rho = \lim_{\Delta\to\infty}\rho_a = \lim_{\Delta\to\infty}\frac{\eta a}{a-0.5\Delta}\left(\frac{\partial v(R)}{\partial R}\right)^2 = \eta\left(\frac{\partial v(R)}{\partial R}\right)^2$$

得(10)式，

方法 2、上面从宏观模型上分析连续层流，下面从微观模型上分析连续层流
设想一侧面积为 S，厚为 L 的矩形层流，任取一个侧面作参考系，另一侧面的流速为 $v = \frac{\partial v(R)}{\partial R}L$，受摩擦力为 $f = \eta\frac{\partial v(R)}{\partial R}S$，能耗功率

$$w = fv = \eta\frac{\partial v(R)}{\partial R}S\frac{\partial v(R)}{\partial R}L = \eta\frac{\partial^2 v(R)}{\partial R^2}SL$$

层流能耗功率密度 ρ 等于单位体积和能耗，则

$$\rho\frac{w}{SL} = \eta\frac{\partial^2 v(R)}{\partial R^2}$$

参考文献

[1]{hlg}华罗庚，数论导引，科技出版社，1979 年
[2]{wy}王元,谈谈素数，上海教育出版社，1978 年
[3]{pcd}潘承洞、潘承彪，素数定理的初等证明，上海科技出版社，1988 年
[4]{fd}复旦大学，概率论，高等教育出版社，1979 年
[5]{wzk}王梓坤，概率论基础及其应用，科技出版社，1979 年
[6]{sx}原北京矿业学院高等数学教研组，数学手册，燃料化学工业出版社，1973 年
[7]{sxxcd}王文才、施桂芬，数学小辞典，科学技术文献出版社，1983 年
[8]{sk}孙琦、旷京华，素数判定与大数分解，辽宁教育出版社，1987 年
[9]{ks}柯召、孙琦，数论讲义，高等教育出版社，1986 年
[10]{lzh}闵嗣鹤，严士健，初等数论(第二版)，1984 年
[11] {HGHL} Hardy G H. Littlewood J E. Some problems of 'partitio numerorum' Ⅲ: on the expression of a number as a sum of primes [J] .Acta Math. 1922.44：1-70.
[12] {xyb} 熊一兵 ，《概率素数论》摘要，内江科技，2004 年，（6）：77～78[In Chinese]
[13] 双重概率筛法与素数分布(修订版)—关于Goldbach猜想、Hilbert第八问题与素数间隔分布的研究 The Dual Probability Sieve Method and the Distribution of Primes(Revision)- On the Goldbach conjecture,the 8th problem of Hilbert and the

YU Xin-he conjecture <<深圳大学学报（理工版）>>2003年04期

宋富高

建议鉴定研究推广应用《概率素数论》

情况如下：
笔者1983年业余研究数学迄今25年，在大家的帮助下，于2008年8月由西南交通大学出版了其43万字的原创性数学专著《概率素数论》，因涉及众多重大数学难题，出版社聘请校内外多位专家教授严格审稿后出版。
希望鉴定以下潜在价值：
一、只涉及大二数学知识，解决问题相对简洁
二、通过公理体系，将随机方法《概率论》与确定事件《素数论》结合，产生一个数学交叉学科。解决或部分解决大量数学问题，其结果均得到实际数据支持
三、发展了《概率论》，使它具有获得肯定性结果的功能——边界
四、为概率方法检验大素数提供了途径，减少黑客攻击网络造成的潜在损失
五、获得素数定理最可机函数等特征，它是数学中最重要的几个定理之一
六、建立熊氏积分，它是针对特定函数最优化的分步积分
七、部分解决了希尔伯特第八问题：
1、证明了黎曼猜测，它是每个奖100 万美元的7个千僖年数学难题（包括中山大学朱熹平教授和清华大学曹怀东教授涉足的“庞加莱猜想”。见网址：
http://math.cersp.com/Specialty/International/200612/3043.html）之一
2、获得哥得巴赫猜想、孪生素数及K生素数分析解
八、1983年用中学方法及约千字的篇幅，简洁地证明了费马大定理。英国数学家安德鲁.怀尔斯1994年用坚深现代数学工具，及20万字的篇幅解决这一问题后，获得了包括被誉为东方诺伯尔奖的邵逸夫100万美元数学奖等众多国际数学大奖，为他的国家民族赢得殊誉

通过鉴定加速学术界认可及推广，也是每个中国人的荣誉，希望得到相关机构、社会各界及有识之士的支持，并建议组建团队研究推广应用《概率素数论》、进入大学课程，作为大学生研究生毕业论文课题，还可考虑向统计物理及与统计有关的宏观经济、金融保险等领域发展

作者简介

熊一兵，男，1960年生于重庆，1968年——1978年在重庆完成中小学教育，1978年获重庆市数学竞赛优胜奖，1978年——1982年就读并毕业于西南交通大学物理师资班，1982年在内江市铁二局子弟校任职至今。联系邮编及地址：641200四川省资中县人民医院钟克励转熊一兵收
2008年9月　　　电话：0832-5527327、13158575105
Email：　njzz_yy@tom.com
有关情况见：http://www.mathchina.com/cgi-bin/topic.cgi?forum=5&topic=4221&start=12&show=0&man=

关键词

概率素数论 概率论 素数论 素数 素数定理 希尔伯特第八问题 黎曼猜测 费马大定理 千僖年数学难题 孪生素数

附录 1　十万内孪生素数$\left(p,p+2\right)$的p值数据表

1，3 5 11 17 29 41 59 71 101 107

2，137 149 179 191 197 227 239 269 281 311

3，347 419 431 461 521 569 599 617 641 659

4，809 821 827 857 881 1019 1031 1049 1061 1091

5，1151 1229 1277 1289 1301 1319 1427 1451 1481 1487

6，1607 1619 1667 1697 1721 1787 1871 1877 1931 1949

7，1997 2027 2081 2087 2111 2129 2141 2237 2267 2309

8，2339 2381 2549 2591 2657 2687 2711 2729 2789 2801

9，2969 2999 3119 3167 3251 3257 3299 3329 3359 3371

10.3389　3461 3467 3527 3539 3557 3581 3671 3767 3821

11，3851 3917 3929 4001 4019 4049 4091 4127 4157 4217

12，4229 4241 4259 4271 4337 4421 4481 4517 4547 4637

13，4649 4721 4787 4799 4931 4967 5009 5021 5099 5231

14，5279 5417 5441 5477 5501 5519 5639 5651 5657 5741

15，5849 5867 5879 6089 6131 6197 6269 6299 6359 6449

16，6551 6569 6659 6689 6701 6761 6779 6791 6827 6869

17，6947 6959 7127 7211 7307 7331 7349 7457 7487 7547

18，7559 7589 7757 7877 7949 8009 8087 8219 8231 8291

19，8387 8429 8537 8597 8627 8819 8837 8861 8969 8999

20，9011 9041 9239 9281 9341 9419 9431 9437 9461 9629

21，9677 9719 9767 9857 9929 10007 10037 10067 10091 10139

22，10271 10301 10331 10427 10457 10499 10529 10709 10859 10889

23，10937 11057 11069 11117 11159 11171 11351 11489 11549 11699

24，11717 11777 11831 11939 11969 12041 12071 12107 12161 12239

25，12251 12377 12539 12611 12821 12917 13001 13007 13217 13337

26，13397 13679 13691 13709 13721 13757 13829 13877 13901 13931

27，13997 14009 14081 14249 14321 14387 14447 14549 14561 14591

28，14627 14867 15137 15269 15287 15329 15359 15581 15641 15647

29，15731 15737 15887 15971 16061 16067 16139 16187 16229 16361

30，16451 16631 16649 16691 16829 16901 16979 17027 17189 17207

31，17291 17387 17417 17489 17579 17597 17657 17681 17747 17789

32，17837 17909 17921 17957 17987 18041 18047 18059 18119 18131

33，18251 18287 18311 18521 18539 18911 18917 19079 19139 19181

34，19211 19379 19421 19427 19469 19541 19697 19751 19841 19889

35，19961 19991 20021 20147 20231 20357 20441 20477 20507 20549

36，20639 20717 20747 20771 20807 20897 20981 21011 21017 21059

37，21191 21317 21377 21491 21521 21557 21587 21599 21611 21647

38，21737 21839 22037 22091 22109 22157 22271 22277 22367 22481

39，22541 22571 22619 22637 22697 22739 22859 22961 23027 23039

40，23057 23201 23291 23369 23537 23561 23627 23669 23687 23741

41，23831 23909 24107 24179 24371 24419 24917 24977 25031 25169

42，25301 25307 25409 25469 25577 25601 25799 25847 25931 25997

43，26111 26249 26261 26681 26699 26711 26729 26861 26879 26891

44，26951 27059 27107 27239 27281 27407 27479 27527 27539 27581

45，27689 27737 27749 27791 27917 27941 28097 28109 28181 28277

46，28307 28349 28409 28547 28571 28619 28661 28751 29021 29129

47，29207 29387 29399 29567 29669 29759 29879 30011 30089 30137

48，30269 30389 30467 30491 30557 30839 30851 30869 31079 31121

49，31151 31181 31247 31319 31391 31511 31541 31721 31727 31769

50，31847 32027 32057 32117 32141 32189 32297 32321 32369 32411

51，32441 32531 32561 32609 32717 32801 32831 32909 32939 32969

52，33071 33149 33179 33287 33329 33347 33587 33599 33617 33749

53，33767 33809 33827 34031 34127 34157 34211 34259 34301 34367

54，34469 34499 34511 34589 34649 34757 34841 34847 34961 35051

55，35081 35279 35447 35507 35531 35591 35729 35801 35837 35897

56，36011 36107 36341 36467 36527 36779 36791 36899 36929 37019

57，37199 37307 37337 37361 37547 37571 37589 37691 37781 37811

58，37991 38237 38327 38447 38459 38567 38609 38651 38669 38711

59，38747 38921 39041 39161 39227 39239 39341 39371 39509 39827

60，39839 40037 40127 40151 40427 40529 40637 40697 40847 41141

61，41177 41201 41231 41387 41411 41519 41609 41759 41849 41957

62，41981 42017 42071 42179 42221 42281 42407 42461 42569 42641

63，42701 42839 42899 43049 43319 43397 43541 43577 43607 43649

64，43781 43787 43889 43961 44027 44087 44129 44201 44267 44279

65，44381 44531 44621 44699 44771 45119 45137 45179 45317 45341

66，45587 45821 46049 46091 46181 46271 46307 46349 46439 46589

67，46679 46769 46817 46829 47057 47147 47351 47387 47417 47657

68，47699 47711 47741 47777 47807 48119 48311 48407 48479 48539

69，48647 48677 48731 48779 48821 48857 48869 48989 49031 49121

70，49169 49199 49277 49331 49367 49391 49409 49529 49547 49667

71，49739 49787 49919 49937 49991 50021 50051 50129 50261 50459

72，50549 50591 50891 50969 51059 51131 51197 51239 51341 51347

73，51419 51437 51479 51719 51767 51827 51869 51971 52067 52181

74，52289 52361 52541 52709 52859 52901 53087 53147 53171 53231

75，53267 53279 53549 53591 53609 53717 53897 54011 54401 54419

76，54497 54539 54581 54629 54917 55049 55217 55331 55337 55439

77，55619 55631 55661 55817 55901 55931 56039 56099 56207 56237

78，56267 56477 56501 56531 56597 56711 56807 56891 56909 56921

79，57191 57221 57269 57329 57347 57527 57557 57791 57899 58109

80，58151 58169 58229 58367 58391 58439 58451 58601 58787 58907

81，59009 59021 59051 59207 59219 59357 59417 59441 59471 59627

82，59669 60089 60101 60167 60257 60647 60659 60761 60887 60899

83，60917 61151 61331 61379 61469 61559 61979 62129 62141 62189

84，62297 62927 62969 62981 62987 63029 63197 63311 63389 63419

85，63587 63599 63647 63689 63839 64151 64187 64301 64451 64577

86，64661 64781 64877 64919 65027 65099 65171 65267 65447 65519

87，65537 65579, 65699 65717 65729 65837 65927 65981 66107 66359

88，66569 66749 66851 66947 67139 67187 67211 67217 67271 67409

89，67427 67577 67757 67931 68111 68207 68279 68447 68489 68711

90，68819 68879 68897 69029 69149 69191 69257 69401 69491 69497

91，69737 69761 69827 69857 69929 70001 70121 70139 70181 70199

92，70379 70457 70487 70571 70619 70841 70877 70919 70949 70979

93，70997 71261 71327 71339 71387 71411 71471 71549 71711 71807

94，71879 72089 72101 72167 72221 72227 72251 72269 72467 72647

95，72671 72869 73037 73061 73361 73607 73679 73847 74099 74159

96，74201 74381 74411 74507 74609 74717 74729 74759 75011 75167

97，75209 75389 75401 75539 75617 75707 75989 76001 76079 76157

98，76259 76367 76421 76541 76649 76829 76871 76961 77237 77261

99，77267 77417 77477 77489 77549 77687 77711 78137 78191 78437

100，78509 78539 78569 78779 78887 78977 79151 79229 79397 79559

101，79631 79691 79697 79811 79841 79901 79997 80147 80207 80231

102，80447 80471 80489 80627 80669 80681 80747 80777 80831 80909

103，81017 81041 81047 81197 81281 81371 81551 81647 81701 81899

104，81929 81971 82007 82037 82139 82217 82349 82469 82529 82559

105，82721 82727 82757 82811 82889 83219 83231 83267 83339 83399

106，83561 83639 83717 84059 84179 84221 84317 84347 84389 84521

107，84629 84809 84857 84869 84977 85091 85199 85331 85361 85427

108，85451 85619 85667 85817 85829 85931 86027 86111 86291 86351

109，86369 86531 86627 86927 87011 87119 87149 87179 87221 87251

110，87509 87539 87557 87587 87629 87641 87719 87959 88001 88259

111，88337 88469 88589 88607 88661 88799 88811 88817 89069 89519

112，89561 89597 89657 89669 89819 89897 90017 90071 90197 90371

113，90401 90437 90527 90617 90677 90821 91079 91097 91127 91139

114，91151 91367 91457 91571 91811 91967 92177 92219 92381 92399

115，92459 92567 92639 92669 92681 92789 92861 92957 93131 93239

116，93251 93281 93479 93491 93557 93701 93761 93809 93887 93911

117，94007 94109 94151 94307 94349 94397 94439 94529 94541 94559

118，94649 94847 94949 95087 95189 95231 95441 95789 95801 95957

119，95987 96179 96221 96329 96587 96737 96797 96821 97001 97157

120，97169 97301 97367 97379 97499 97547 97577 97607 97649 97787

121，97841 97847 97859 98009 98297 98321 98387 98561 98639 98711

122，98729 98807 98867 98897 98909 98927 99131 99137 99257 99347

123，99527 99707 99719 99989

计 1224 个

谢谢 朵朵先生在东陆论坛的以下网址给出数据整理成上表

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=30836&Forum_ID=7

附录 2　十万内最密三生素数 $(p, p+2, p+6)$ 的 p 值数据表

n	7n +1	7n+2	7n+3	7n+4	7n+5	7n+6	7n+7
0	11	17	41	101	107	191	227
1	311	347	461	641	821	857	881
2	1091	1277	1301	1427	1481	1487	1607
3	1871	1997	2081	2237	2267	2657	2687
4	3251	3461	3527	3671	3917	4001	4127
5	4517	4637	4787	4931	4967	5231	5477
6	5501	5651	6197	6827	7877	8087	8231
7	8291	8537	8861	9431	9461	10331	10427
8	10457	11171	11777	12107	12917	13001	13691
9	13757	13877	13901	14081	14321	14627	15641
10	15731	16061	16067	16187	17027	17387	18041
11	18251	18911	19421	19427	19991	20477	20747
12	20897	21011	21017	21317	21377	21557	21611
13	22271	22277	22637	23057	23291	23561	23627
14	23741	24107	24917	25031	25301	25577	25997
15	26261	26681	26711	27737	27941	28277	29021
16	29567	30491	31247	31391	31511	31541	31721
17	32057	32297	32321	32531	33347	33617	33767
18	34211	34757	34841	35531	35591	36011	36467
19	37307	37991	38327	38447	39041	39227	40427
20	40847	41177	42017	42221	42461	43397	43607
21	43781	43787	44201	44267	44531	44771	45821
22	46181	47711	48401	49031	49937	51131	51197
23	51341	51971	53087	53591	54497	55331	55337
24	55661	55817	56807	56891	58907	59441	60101
25	60917	62297	62981	63311	64151	64661	65027
26	65537	65837	67211	67427	67757	68207	68897
27	69191	69257	69491	69761	69827	71327	72167
28	72221	73037	73607	75011	75401	76157	77237
29	77261	78887	79691	79811	79841	79901	80147
30	80681	80777	81017	81041	81197	81701	82007
31	82217	82721	82757	83267	86111	86291	86351
32	87251	88001	88661	88811	89561	89597	90017
33	90197	90401	90527	91367	91457	91571	92381
34	92861	93251	93281	93491	93557	93887	94541
35	95087	96821	97001	97367	97547	97607	97841
36	98321	98711	98867	99131	99707		

(计 258，由东陆论坛网友豆豆提供了 100 万内两组三生素数的实际数据，wtquan 提供了 1 亿内的三生素数的实际数据，整理而成，谢谢！！）

网址：http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23386&Forum_ID=7）

附录 3　千万内最密四生素数 $(p, p+2, p+6, p+8)$ p 值数据表

n	7n +1	7n+2	7n+3	7n+4	7n+5	7n+6	7n+7
0	11	101	191	821	1481	1871	2081
1	3251	3461	5651	9431	13001	15641	15731
2	16061	18041	18911	19421	21011	22271	25301
3	31721	34841	43781	51341	55331	62981	67211
4	69491	72221	77261	79691	81041	82721	88811
5	97841	99131	101111	109841	116531	119291	122201
6	135461	144161	157271	165701	166841	171161	187631
7	194861	195731	201491	201821	217361	225341	240041
8	243701	247601	247991	257861	260411	266681	268811
9	276041	284741	285281	294311	295871	299471	300491
10	301991	326141	334421	340931	346391	347981	354251
11	358901	361211	375251	388691	389561	392261	394811
12	397541	397751	402131	402761	412031	419051	420851
13	427241	442571	444341	452531	463451	465161	467471
14	470081	477011	490571	495611	500231	510611	518801
15	536441	536771	539501	549161	559211	563411	570041
16	572651	585911	594821	597671	607301	622241	626621
17	632081	632321	633461	633791	654161	657491	661091
18	663581	664661	666431	680291	681251	691721	705161
19	715151	734471	736361	739391	768191	773021	795791
20	803441	814061	822161	823721	829721	833711	837071
21	845981	854921	855731	857951	875261	876011	881471
22	889871	907391	930071	938051	946661	954971	958541
23	959471	976301	978071	983441	1002341	1003361	1006301
24	1006331	1008851	1015361	1022381	1022501	1023941	1027751
25	1043591	1063961	1065011	1068251	1068701	1091261	1093061
26	1093991	1100831	1117601	1117811	1118861	1120541	1121831
27	1122131	1126661	1137881	1146791	1155611	1156031	1157831
28	1163711	1167701	1168241	1170131	1172021	1172531	1173581
29	1182281	1210871	1228391	1230371	1233431	1246241	1246361
30	1257071	1272281	1285511	1298111	1322171	1322591	1324571
31	1329701	1337261	1339901	1340321	1351241	1352201	1358801
32	1360781	1368461	1381271	1400801	1402361	1410971	1440581
33	1447001	1451831	1461401	1468631	1508621	1514321	1524071
34	1525961	1540961	1571741	1573541	1573931	1577291	1584431
35	1588751	1592861	1603331	1615841	1616801	1621721	1627601
36	1631051	1653101	1659101	1670561	1678751	1681871	1685441
37	1691861	1711811	1718861	1727771	1747721	1748471	1749491
38	1755821	1764221	1780481	1791731	1797371	1798631	1802651
39	1819841	1830341	1833521	1834031	1837391	1857671	1890521
40	1902611	1904471	1910261	1912061	1912451	1915931	1917731
41	1925381	1943651	1954151	1954361	1959311	1979141	1979891
42	2002331	2007611	2007911	2016401	2020721	2050331	2062001
43	2063771	2065571	2075831	2079191	2083511	2084441	2087381
44	2107661	2116571	2136131	2141801	2143481	2144501	2157731
45	2159231	2168651	2176631	2177501	2193881	2202791	2203961
46	2223671	2225051	2246141	2248241	2256341	2262971	2266631
47	2289641	2290031	2294051	2303591	2340251	2342771	2362271
48	2373401	2376161	2381081	2403881	2413421	2418671	2423411
49	2443781	2458661	2470331	2478521	2479661	2499941	2508041

50	2535101	2541941	2546231	2552111	2552651	2561261	2564321
51	2576591	2594951	2594981	2596661	2604731	2614061	2635481
52	2668241	2673521	2674541	2679491	2683781	2696921	2704901
53	2712371	2715281	2728541	2731691	2731901	2759291	2761721
54	2764121	2790251	2805161	2822711	2839931	2840261	2846861
55	2849681	2875331	2879291	2893481	2918561	2927591	2927801
56	2952791	2954681	2989031	2990831	3047411	3058871	3062201
57	3063491	3066821	3076391	3089321	3092561	3101471	3103271
58	3129611	3153581	3157571	3171731	3187601	3200201	3207431
59	3208811	3215741	3224861	3243341	3277691	3295541	3308951
60	3326621	3328901	3340871	3366821	3371441	3374471	3378041
61	3400211	3416051	3436241	3437711	3467531	3479891	3512051
62	3512231	3512981	3513071	3514541	3518321	3550691	3584921
63	3586901	3593501	3621461	3652931	3669761	3690521	3713441
64	3727721	3735161	3741161	3798071	3817811	3837131	3837851
65	3849821	3854111	3894041	3919211	3919241	3951551	3974351
66	3974681	3975701	3995441	3996521	4015931	4016561	4032401
67	4039661	4042601	4058471	4059191	4092701	4098461	4110341
68	4138241	4144961	4155911	4157891	4174601	4185911	4208621
69	4218281	4224371	4234421	4257521	4262171	4265081	4265711
70	4285661	4300181	4316771	4326401	4332611	4336091	4353311
71	4361471	4370081	4377671	4396781	4404551	4405691	4413581
72	4415441	4453481	4467011	4487801	4510481	4529381	4540091
73	4543241	4544201	4561631	4575281	4579871	4596071	4606571
74	4609301	4615601	4627871	4635971	4647281	4660541	4675241
75	4693691	4706411	4707971	4734671	4740641	4743701	4796081
76	4809941	4832411	4833131	4852451	4868651	4875251	4900451
77	4950131	4956821	4959041	4972061	4977431	4997381	5025071
78	5037911	5047121	5073371	5074871	5146481	5154761	5158031
79	5168921	5184791	5201291	5205461	5229401	5234681	5239181
80	5248091	5251781	5253761	5261741	5274161	5274671	5278571
81	5318891	5327891	5381861	5382101	5417381	5425751	5436281
82	5450111	5461991	5465351	5484131	5499071	5527001	5610461
83	5614151	5651741	5675141	5698571	5732141	5733521	5734691
84	5760101	5774141	5805251	5839571	5841461	5851421	5860241
85	5892701	5908451	5922221	5928821	5930921	5937851	5938781
86	5969651	5977331	5986031	6005891	6013151	6016091	6023651
87	6024041	6054281	6056201	6066581	6102911	6106481	6130541
88	6136211	6144371	6153311	6156971	6177881	6187451	6193301
89	6201491	6213791	6250421	6261371	6287921	6297581	6299141
90	6324551	6329501	6332861	6334871	6359231	6378131	6402161
91	6404771	6406571	6419291	6438191	6464201	6471131	6474821
92	6484061	6495941	6498221	6501791	6503591	6509681	6510191
93	6512081	6528671	6556601	6561011	6578651	6582461	6595571
94	6600491	6601781	6602201	6613331	6616781	6621281	6631901
95	6641351	6655541	6655631	6692261	6699611	6700691	6708851
96	6715271	6715991	6727541	6735011	6740471	6753821	6758951
97	6760001	6787631	6796631	6843371	6880871	6884741	6900911
98	6915191	6918011	6918341	6925151	6937961	6942491	6945551
99	6949331	7014611	7016741	7025651	7027451	7039841	7045691
100	7051391	7079711	7081181	7097801	7130861	7151141	7159511
101	7161851	7166141	7177061	7187771	7201631	7235951	7267451
102	7273991	7286681	7305371	7316291	7328771	7335941	7340231
103	7348631	7356071	7367021	7369331	7371641	7417511	7422221
104	7433051	7448471	7464551	7465481	7475381	7477991	7483781
105	7499201	7527251	7534061	7534601	7537331	7540451	7541921

106	7545911	7580381	7583501	7599041	7610921	7641371	7645661
107	7659011	7669811	7681361	7701761	7703231	7734821	7754891
108	7774301	7802231	7806431	7813361	7814291	7846541	7861031
109	7879841	7882871	7913231	7934651	7945031	7960151	7961951
110	7989461	8023661	8059061	8062001	8070911	8101781	8108531
111	8166071	8178251	8183891	8194931	8208911	8248061	8281571
112	8312411	8313911	8318411	8326601	8336591	8339621	8344151
113	8348531	8381531	8385101	8431061	8445971	8460581	8467631
114	8487371	8497031	8513171	8519471	8540501	8557721	8561801
115	8568401	8573441	8576591	8594681	8604641	8616911	8619431
116	8621861	8623031	8648831	8658101	8669621	8677391	8685371
117	8691581	8717741	8729051	8741141	8748581	8773151	8799611
118	8827541	8831981	8833241	8844371	8868521	8878271	8898311
119	8914181	8926451	9020981	9081461	9081881	9083021	9127631
120	9138131	9146981	9154961	9165251	9220241	9276851	9280541
121	9291641	9299441	9320321	9324431	9353291	9365591	9369551
122	9394961	9426491	9439271	9440441	9446861	9463241	9479411
123	9494201	9503951	9508061	9511421	9538091	9541991	9549101
124	9550391	9585881	9589421	9600551	9600581	9617981	9627461
125	9640481	9721421	9723011	9725951	9733811	9739901	9743471
126	9744401	9750071	9774461	9778031	9783881	9792701	9835751
127	9876101	9892031	9910751	9917051	9923981	9933611	9950201
128	9950531	9973211					

(共 127*7+2=889 个)

本数据表从云南大理的朵朵先生!在东陆论坛的以下网址给出数据整理而成，借此谢谢！

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=30836&Forum_ID=7

$(p, p+2, p+6, p+8)$ R 的 p 值数据表中的实际数据，本定理及数据发帖网址：

http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=23793&Forum_ID=9

说明：

附 3 数据表中的数据，如第二行，第二列的 11，表示最密四生素数 $(p, p+2, p+6, p+8)$ 中的第一个素数值是 11，且在表的每一行中，由小到大依次从左向右排列，每行 7 个数，n 的值表示它处的行数，故任选一 p 值，根据它的行列数可算出它的序列号：如 201821，它处于 7 行 4 列，其序列号为：$7(n+1)+4=7*8+4=60$，与它相邻的是 217361，两者间距为 $217361-201821=15540$

附录4 1亿内形如7(P，P+4，P+6，P+10，P+12)的5生素数P值表

7 97 1867 3457 5647 15727 16057 19417
43777 43781 79687 88807 101107 257857 266677 276037
284737 340927 354247 375247 402757 419047 427237 463447
470077 626617 666427 736357 823717 855727 959467 978067
1022377 1043587 1068247 1091257 1118857 1146787 1155607 1167697
(40)
1182277 1230367 1285507 1324567 1440577 1446997 1525957 1573927
1588747 1615837 1621717 1830337 1837387 1904467 1910257 1954357
2002327 2016397 2050327 2087377 2176627 2202787 2248237 2381077
2470327 2478517 2479657 2535097 2546227 2552107 2552647 2594947
2674537 2683777 2805157 2822707 2839927 2893477 2927797 2952787
(80)
3076387 3224857 3243337 3374467 3400207 3416047 3512227 3586897
3690517 3995437 4157887 4265077 4332607 4487797 4510477 4529377
4543237 4647277 4693687 4706407 4852447 4956817 4959037 5047117
5184787 5239177 5253757 5274667 5327887 5425747 5732137 5733517
5839567 5930917 5986027 6005887 6054277 6156967 6213787 6250417
(120)
6324547 6402157 6464197 6484057 6503587 6509677 6561007 6616777
6699607 6884737 6918007 7079707 7159507 7187767 7235947 7340227
7417507 7534057 7540447 7599037 7641367 7681357 7734817 7861027
8061997 8101777 8248057 8445967 8573437 8619427 8621857 8677387
8685367 8741137 8773147 8799607 9127627 9276847 9503947 9511417
(160)
9933607 9973207 10018027 10079977 10264147 10344067 10368637 10526557 10627027
10629247 10759027 11047447 11086837 11138707 11238757 11310697 11471557 11664547
12039487 12141967 12300637 12320167 12590107 12636517 12671377 12748357
12773857 13179577 13310827 13597267 13609147 13673917 13749007 13766737
13858297 14059807 14132347 14235667 14350537 14480017
(200)
14520547 14812867 14834707 14856757 14883217 15060337 15240937 15568867
15602767 15680047 15988117 16025827 16049017 16094707 16334947 16388917
16915267 16960117 16963147 17062687 17428837 17758837 17805577 17843467
17958757 18362287 18464977 18546547 18559987 18576577 18578167 18766327
18916477 19046767 19089607 19197247 19227907 19634047 19696837 19739887
(240)
19800367 19808137 20062447 20112217 20142247 20247037 20610427 20675527
20726257 20799127 20916937 21132487 21321187 21540217 21836197 21838507
21850177 22161697 22186057 22246327 22292857 22563967 22587277 22678417
23317747 23577637 24001717 24021457 24093067 24378037 24406087 24467077

24520537 24538597 24572617 24771577 24786397 24808867 24898957 24904717
(280)
24981157 25009417 25117237 25149997 25392547 25524127 25688557 25911157
26078947 26217637 26282227 26397187 26534527 26621887 26668507 26882407
26919787 27305557 27418747 27501697 27661717 27813427 28194367 28595257
28762417 29153557 29195857 29332477 29842447 30046057 30160177 30326497
30370927 30397897 30655897 30693577 31117057 31252927 31303417 31563937
（320）
31729717 31816657 31875577 32582437 32735617 32836747 33074047 33081397
33253267 33503077 33541297 33575947 33580237 33683047 33722827 33731977
33840637 34314187 34334467 34357237 34406077 34456987 34512547 34709527
34870597 35169517 35545417 36179827 36209857 36319177 36739267 36891307
36985297 37055647 37162117 38028577 38303887 38338117 38352397 38468317
（360）
38718727 38784787 38885047 38896597 38964847 39080137 39343387 39425917
39533227 39811147 40003207 40079437 40207627 40370167 40660717 40968457
41193787 41214067 41216467 41763427 41927437 42182047 42208207 42289061
42650347 42739387 42785287 42882397 42981937 42994867 43056697 43089457
43447507 43534027 43627267 43708117 43730497 43795177 44315977 44665717
（400）
44842867 45196507 45290797 45330997 45458587 45578077 45625747 45836047
45974557 46073557 46155247 46175527 46179307 46192837 46780417 47158537
47204737 47331367 47347117 47361487 47395207 47614747 47969017 48164527
48283087 48375487 48660247 48984577 49157737 49497187 49653547 49682617
50206357 50350117 50612197 50685907 50693047 50943787 51093397 51135307
（440）
51255637 51497857 51595627 51939067 52033357 52043347 52256377 52433197
52988227 53204857 53266387 53286217 53373157 53399107 53432077 54178207
54212017 54261037 54322777 54523747 54873517 55017877 55057897 55276597
55311457 55323007 55412167 55628887 55751407 55986937 56041747 56103907
56326177 56383417 56392867 56431927 56653777 56858437 56902117 56906737
（480）
57215527 57449797 57514987 57584707 57812467 57915457 58128397 58328857
58374727 58682797 58981837 58992877 59307967 59681047 59704027 59877397
60391687 60533017 60615427 60796027 60858397 61052347 61295317 61525687
61580797 61636447 61934017 62000291 62058247 62155987 62459857 62582407
62757967 62776657 63116947 63655717 63908557 63965347 64210117 65240887
（520）
65509897 65689567 65983657 66267907 66428767 66678967 66687997 66995437
67022227 67435387 67631947 68255977 68488747 68525287 68795887 69042427
69156547 69296317 69336427 69410347 69517957 69737527 69841687 70138087
70315537 70598317 71098207 71119747 71373217 71541727 71552017 71851687
72508147 72610117 72808447 72848767 72997357 73387207 73430167 73449577
（560）

73567387 73899817 73932577 73957987 73976047 74266267 74283607 74390077
74772487 75085597 75154687 75289387 75427267 75515047 75660577 75708877
76093597 76150507 76244797 76630987 76668037 76683701 77244907 77251627
77487457 77788297 77840167 77954077 77973937 78331147 78621457 78810877
78814777 78900457 78989917 79024867 79208407 79413067 79648267 80124217
（600）
80204017 80427037 80460547 80793277 80911087 81055357 81151117 81517477
82140757 82473487 82675837 82765087 82984537 83058967 83174467 83442757
84104557 84171667 84459367 84491497 84492637 85170637 85378207 85577617
85694887 85743187 86498977 86542447 86749207 87275887 87423097 87837637
87917737 87988717 88156087 88481377 88606117 88833127 88881337 88943287
（640）
88947997 89127757 89483827 89610877 89888167 89953177 90338947 90388927
90439957 90710527 90945307 91123387 91500547 91537087 91557667 91558627
91586767 92001187 92061787 92075437 92254027 92389897 92856007 93664387
93700297 94203667 94325677 94752727 94758607 94791787 95120647 95235397
95321197 95425147 95487937 95753257 95953387 96054307 96228697 96774697
（680）
96820807 97523347 97830907 97916047 97921927 97937677 98915977 99107077
99215647 99955567

计 690 个（其中 形如 5（p，p+2，p+6，p+8，p+12）的最密 5 生素数计 695 个,两种最密 5 生素数共 1385 个）

谢谢 东陆论坛：gemenhao 先生编程提供数据整理成下表，网址
http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=30836&Forum_ID=7

附录 5 十亿内形如（P，P+4，P+6，P+10，P+12，P+16）的 6 生素数 P 值表

7 97 16057 19417 43777 1091257 1615837 1954357
2822707 2839927 3243337 3400207 6005887 6503587 7187767 7641367
8061997 8741137 10526557 11086837 11664547 14520547 14812867 14834707
14856757 16025827 16094707 18916477 19197247 19634047 19800367 20112217
20247037 21321187 21850177 22587277 24786397 25009417 25524127 27305557

29153557 31563937 31875577 32836747 33575947 36319177 36985297 37055647
40660717 41214067 41763427 41927437 44842867 45974557 47204737 48660247
49157737 50685907 50943787 51255637 53204857 53266387 55057897 56431927
57812467 59877397 61052347 62757967 63655717 65689567 67022227 69296317
72610117 74283607 74390077 75085597 76150507 79413067 82984537 87423097

89483827 94752727 112710877 114405997 114812767 115198537 115921567 119279257
119732017 123821767 124160077 125847847 130278007 131118847 132842107 135941077
140124697 146022127 149620057 150733477 151048477 151659367 151848787 151946227
152574547 153090517 153514717 154597897 155011387 156896137 163893127 164221147
164564497 165601477 166000057 175258537 176919637 180646717 184706437 185938927

187315477 188722477 190504747 191128027 204332407 205137337 205216717 209823067
213861997 214187917 215989717 221389027 222762637 223136647 223789117 225443077
226901107 228667837 234929407 236608777 238523557 240293227 243857347 246843127
248834137 253746667 257699077 258145747 260708797 273649627 276244597 277682677
278340187 279328447 288004807 290181247 294430177 296095687 298713967 300466417

313106737 316650277 323301607 324805837 327160777 329549317 335699587 338861977
339484417 344941687 358413817 359772307 360054127 360876067 361361587 363720937
372791047 373434697 381674467 403629757 404941627 411454777 411634117 411746047
412633927 414572227 417397147 417962257 419208607 429747667 434056027 434863057
441950137 450614107 451556377 454544257 462926407 466193797 474190807 474225667

481326397 487027897 489846937 494319097 495303157 495588547 507420367 508055407
511015777 516518407 519696757 538281967 541937647 542460547 545170177 554504047
555319477 561116317 562887037 563069317 563681467 565204807 569347057 570197977
572792317 578791387 579276277 586313587 587191597 591130357 591535657 591914497
599142277 600976417 600998677 602699677 603324637 604313527 609735937 611984827

615240667 615306397 616299907 631585177 631751707 646616137 656317297 660329767
667624537 674084767 677637127 682324537 682478887 682715977 683689537 687979207
699234577 707326507 710591587 711574597 714435427 715571947 722076907 725565427
729562567 742987237 751027087 751751167 759297937 762112987 763502557 771517837
776447797 780885097 787985827 794929897 796908517 809895127 817097917 822943477

823145497 823568017 838112827 841897867 844501237 854248387 858033427 862920337 868339177 870132157 870231487 872922217 887895637 889753297 895397677 907438657 907907167 910537207 912786307 918492007 918649087 919496437 926463397 933449047 937630147 941357227 954965647 957236167 962551687 966397837 972066367 974334997 979662907 981328627 982936387 983290657 984491857

共317个

谢谢 东陆论坛：gemenhao先生编程提供数据整理成上表，网址
http://www.channelwest.com/bbs/showtopic.asp?TOPIC_ID=30836&Forum_ID=7